
UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

CINQUIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LEVY, A. MANNHEIM, E. PICARD, H. POINCARÉ.

TOME CINQUIÈME. — ANNÉE 1899.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques

(Premier Mémoire);

Par M. Émile PICARD.

On sait combien, dans la théorie des courbes algébriques, la distinction des intégrales abéliennes en *trois* espèces joue un rôle important. Dans un grand nombre de questions, les intégrales de *première* et de *seconde* espèce sont particulièrement intéressantes à considérer. Il est naturel de chercher à faire pour les intégrales doubles attachées à une surface algébrique, c'est-à-dire pour les intégrales doubles

$$\int\int \mathrm{R}(x, y, z)\, dx\, dy \qquad [f(x, y, z) = 0]$$

(où R est rationnelle en x, y et z), une classification plus ou moins analogue. On a considéré, depuis longtemps, les intégrales doubles

de *première* espèce attachées à une surface, et ces intégrales jouent un rôle très important quand on présente sous une forme analytique les célèbres travaux de M. Nœther sur les surfaces. On n'a jamais cherché jusqu'ici à établir une classification plus complète. Je me propose, dans ce premier Mémoire, de poser les bases d'une théorie des intégrales doubles *de seconde espèce* dans la théorie des surfaces algébriques, et de montrer comment la notion d'intégrale de seconde espèce conduit à un nombre invariant, qui paraît distinct de ceux qui ont été considérés jusqu'ici. Dans un second Travail, j'approfondirai quelques-uns des problèmes qui se posent d'eux-mêmes, les propositions fondamentales une fois établies; nous montrerons alors la connexion intime qui existe entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et l'étude des cycles linéaires sur une surface, étude dont je me suis occupé dans mes recherches antérieures et en particulier dans ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*. Les points essentiels du Mémoire actuel ont été indiqués succinctement dans les *Comptes rendus* (6 décembre 1897, 24 janvier 1898 et 24 octobre 1898).

I. — Des intégrales doubles de seconde espèce.

1. Considérons une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0$$

et soit une intégrale double relative à cette surface

$$\iint R(x, y, z)\, dx\, dy, \tag{1}$$

R étant rationnelle en x, y et z. Nous allons tout d'abord définir ce que nous entendons par *intégrale double de seconde espèce* (¹).

Prenons sur la surface un point arbitraire A, que l'on peut toujours, par une transformation préalable, supposer à distance finie. Si le

(¹) Nous donnerons dans la Section IX une autre définition des intégrales de seconde espèce, provenant de la considération des *résidus* de l'intégrale double.

point A est un point simple, nous dirons que l'intégrale (1) présente le *caractère* d'une intégrale de seconde espèce, si l'on peut trouver deux fonctions rationnelles U et V de x, y, z, telles que, après avoir formé l'intégrale double

$$(2) \qquad \int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

la différence des intégrales (1) et (2) reste finie au voisinage de A (on considère, bien entendu, z comme fonction de x et y quand on prend les dérivées partielles de U et V par rapport à x et y). Si le point A est un point multiple de f, on sait que l'on peut partager le voisinage de A en un certain nombre de régions, telles que chacune d'elles corresponde birationnellement à une région R située sur une surface F, et ne comprenant que des points simples de F; l'intégrale (1) présentera en A le caractère d'une intégrale de seconde espèce, si ses transformées, par chacune des substitutions birationnelles à employer, présentent, en tous les points de la région correspondante R de la surface correspondante F, le caractère d'une intégrale de seconde espèce. Si, en tout point A de la surface f (à distance finie ou à l'infini), l'intégrale (1) présente le caractère d'une intégrale de seconde espèce, *cette intégrale sera dite une intégrale double de seconde espèce*. Il est clair que les fonctions rationnelles U et V à employer pourront varier avec le point A.

2. Il importe tout d'abord de s'assurer que la forme des expressions (2) est de nature *invariante* relativement aux transformations birationnelles. On s'en assure de la manière suivante. Envisageons d'abord l'intégrale

$$(3) \qquad \int\int\frac{D(P, Q)}{D(x, y)}\,dx\,dy,$$

où $\frac{D(P, Q)}{D(x, y)}$ représente le déterminant fonctionnel des deux fonctions P et Q de x et y; si l'on remplace les variables x et y par de nouvelles variables x' et y', l'intégrale devient évidemment

$$\int\int\frac{D(P, Q)}{D(x', y')}\,dx'\,dy'$$

et garde par suite la même forme. Or, l'intégrale (3) rentre manifestement dans le type (2), puisqu'on peut l'écrire

$$\int\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial Q}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(P\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right]dx\,dy.$$

Ceci posé, on peut donner à (2) la forme suivante

$$\int\int\frac{D(U,y)}{D(x,y)}dx\,dy+\int\int\frac{D(x,V)}{D(x,y)}dx\,dy;$$

en faisant un changement de variables, on aura

$$\int\int\frac{D(U,y)}{D(x',y')}dx'\,dy'+\int\int\frac{D(x,V)}{D(x',y')}dx'\,dy'$$

et, d'après ce que nous venons de dire, chaque terme de cette somme et, par suite, la somme se mettent sous la forme

$$\int\int\left(\frac{\partial U_1}{\partial x'}+\frac{\partial V_1}{\partial y'}\right)dx'\,dy'.$$

L'intégrale (2) a donc conservé la même forme quand on a remplacé les variables x et y par les variables x' et y'; c'est l'*invariance que nous voulions établir*.

5. Remarquons, avant de continuer, qu'une définition analogue à celle que nous venons de donner pour les intégrales doubles de seconde espèce peut être adoptée pour les intégrales simples de seconde espèce dans la théorie des courbes algébriques. Si l'on a la courbe

$$f(x,y)=0,$$

les intégrales abéliennes de seconde espèce

$$\int R(x,y)\,dx,$$

relatives à cette courbe sont telles que, pour tout point A de la courbe, on peut trouver une fonction rationnelle $U(x,y)$, telle que la diffé-

rence

$$\int \mathrm{R}(x,y)\,dx - \int \frac{d\mathrm{U}}{dx}\,dx$$

reste finie dans le voisinage de A.

4. On sait que, pour une courbe algébrique, il n'existe qu'un nombre *limité* d'intégrales abéliennes de seconde espèce, c'est-à-dire qu'il existe un nombre *limité* d'intégrales abéliennes J de seconde espèce, dont aucune combinaison linéaire n'est de la forme

$$(\alpha) \qquad \int \frac{d\mathrm{U}}{dx}\,dx$$

(U étant rationnelle en x et y), et telles que toute autre intégrale de seconde espèce est une combinaison linéaire des intégrales J, à un terme additif près de la forme (α).

Nous devons nous demander s'il en est de même dans la théorie des surfaces algébriques. Nous allons montrer, pour répondre à cette question, qu'*il existe un nombre limité ρ d'intégrales* J *de seconde espèce, dont aucune combinaison linéaire n'est de la forme*

$$(\beta) \qquad \int\int \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right) dx\,dy$$

(P et Q étant rationnelles en x, y et z), *et telles que toute autre intégrale de seconde espèce est une combinaison linéaire des intégrales* J, *à un terme additif près de la forme* (β). La démonstration de ce résultat sera la conséquence d'une longue suite de transformations de calculs qui vont faire l'objet des Sections suivantes. Nous aurons ensuite à montrer qu'une intégrale double de seconde espèce relative à une surface f se change, quand on transforme birationnellement f en une surface F, en une intégrale de seconde espèce de la surface F. Ce fait ne résulte pas immédiatement du calcul du § 2 et demandera quelques explications.

II. — Remarques générales.

5. Commençons par étudier les intégrales de seconde espèce ayant la forme particulière

$$(4) \qquad \int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z} \qquad (\alpha > 0 \text{ et P étant un polynome}),$$

en supposant, comme il est permis, que la surface de degré m

$$f(x, y, z) = 0$$

occupe une position arbitraire par rapport aux axes de coordonnées. Envisageons l'intégrale simple

$$(5) \qquad \int \frac{P(x, \bar{y}, z)\,dx}{(x-a)^\alpha f'_z}$$

relative à la courbe entre x et z

$$f(x, \bar{y}, z) = 0,$$

où y est un paramètre. On sait que, par la soustraction d'une expression de la forme

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{Q(x, z)}{(x-a)^{\alpha-1}}\right) dx,$$

on peut ramener l'intégrale (5) à une intégrale analogue, où α est remplacé par $\alpha - 1$. Toutefois les coefficients du polynome $Q(x, z)$ en x et z étant des fractions rationnelles de y, il figurera dans la nouvelle intégrale, au dénominateur, un polynome en y. Il importe d'examiner de quelle manière y figure dans ce dénominateur. Soient z_1, z_2, ..., z_m les m racines de l'équation

$$f(a, \bar{y}, z) = 0;$$

le polynome $Q(x, z)$ est seulement assujetti à vérifier les équations

$$(\alpha-1) f_z(a, \bar{y}, z_i) Q(a, z_i) + P(a, \bar{y}, z_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Il suffira de prendre pour $Q(x, z)$ un polynome en z de degré $m-1$, et il est clair que ses coefficients contiendront, en dénominateur, le résultant des deux équations

$$f(a, y, z) = 0, \qquad f'_z(a, y, z) = 0.$$

Notre dénominateur admettra donc pour racines simples les valeurs de y correspondant aux points de la courbe

$$f(a, y, z) = 0,$$

où la tangente est parallèle à l'axe des z, et pour racines doubles les valeurs de y correspondant aux points doubles de cette courbe, si la courbe n'a que des points doubles. Soit d'une manière générale $\Delta(y)$ ce résultant; l'intégrale (4), par la soustraction d'une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{\partial U}{\partial x}\, dx\, dy$$

(où U est rationnelle en x, y, z), se trouve ramenée à une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)^{\alpha-1}\Delta(y) f_z}.$$

En continuant de la même manière, on arrivera évidemment à une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)[\Delta(y)]^{\alpha-1} f_z},$$

P étant toujours un polynome.

6. Puisque l'intégrale précédente est de seconde espèce, on peut,

dans le voisinage d'un point arbitraire de la courbe [1]

$$(\gamma) \qquad x = a, \qquad f(x, y, z) = 0,$$

retrancher une intégrale double de la forme

$$\int\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy$$

de telle sorte que la différence reste finie dans le voisinage du point. Les fractions rationnelles U et V sont nécessairement de la forme

$$U = \frac{A(x, y, z)}{(x-a)^\lambda}, \qquad V = \frac{B(x, y, z)}{(x-a)^\mu},$$

A et B étant encore des fractions rationnelles, mais qui ne deviennent pas infinies, et supposons que B ne s'annule pas identiquement sur la courbe γ.

Si λ est supérieur à $\mu - 1$, A s'annule nécessairement pour $x = a$, et par suite on peut, de proche en proche, réduire λ à $\mu - 1$. On peut d'ailleurs dans tous les cas supposer

$$\lambda = \mu - 1$$

en multipliant, s'il est nécessaire, les deux termes de U par une puissance de $x - a$.

Nous avons donc l'expression

$$(\delta) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{A(x, y, z)}{(x-a)^{\mu-1}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{B(x, y, z)}{(x-a)^{\mu}}\right].$$

Si μ est supérieur à *un*, la différence

$$-(\mu - 1)A(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} B(x, y, z)$$

---

[1] On peut supposer que cette courbe est indécomposable, car, les axes de coordonnées étant arbitrairement choisis, les plans

$$x = \text{const.}$$

coupent tous la surface suivant une seule courbe, en laissant de côté la surface de Steiner et les surfaces réglées.

s'annulera nécessairement pour la courbe (γ), c'est-à-dire que l'on aura

$$-(\mu-1)A(a,y,\zeta)+\frac{\partial}{\partial y}B(a,y,\zeta)=0 \quad |\text{avec } f(a,y,\zeta)=0|.$$

On en conclut que l'expression (δ), qui peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{A(x,y,z)}{(x-a)^{\mu-1}}-\frac{1}{\mu-1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{B(x,y,z)}{(x-a)^{\mu-1}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{B(x,y,z)}{(x-a)^{\mu}}+\frac{1}{\mu-1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{B(x,y,z)}{(x-a)^{\mu-1}}\right]$$

est de même forme que (δ), sauf que μ y est remplacé par $\mu-1$. Donc, en allant de proche en proche, on peut supposer $\mu=1$, et, par suite, la différence

$$\frac{P(x,y,z)}{[\Delta(y)]^{\alpha-1}f'_z}-\frac{\partial}{\partial y}B(x,y,z)$$

doit s'annuler pour $x=a$. On en conclut que

$$\frac{P(a,y,\zeta)}{[\Delta(y)]^{\alpha-1}f'_\zeta}=\frac{\partial}{\partial y}B(a,y,\zeta),$$

ζ étant la fonction de y définie par $f(a,y,\zeta)=0$. La fonction rationnelle $B(a,y,\zeta)$ pourra nécessairement se mettre sous la forme

$$\frac{S(y,\zeta)}{U(y)},$$

S et U étant des polynomes, et les racines de $U(y)$ appartenant à $\Delta(y)$. Ceci posé, formons la différence

$$\int\int\frac{P(x,y,z)\,dx\,dy}{(x-a)(\Delta y)^{\alpha-1}f'_z}-\int\int\frac{\partial}{\partial y}\frac{S(y,z)}{(x-a)\,U(y)}\,dx\,dy.$$

Elle sera de la forme

$$\int\int\frac{Q(x,y,z)}{W(y)}\frac{dx\,dy}{f'_z},$$

Q et V étant des polynomes et les racines de $W(y)$ appartenant à $\Delta(y)$.

III. — Première réduction, dans le cas des surfaces sans singularités.

7. Les transformations précédentes vont bientôt nous être utiles. Nous allons maintenant revenir à l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y, z)}{(x-a)^\alpha f'_z} dx\, dy,$$

supposée de seconde espèce, en supposant que la surface n'ait pas de singularités. Considérons d'abord le cas où le plan $x = a$ n'est pas tangent à la surface. Il va être facile dans ce cas d'effectuer une réduction en supposant $\alpha > 1$. Je dis qu'on peut déterminer deux *polynomes* $A(x, y, z)$ et $B(x, y, z)$, de telle sorte que l'intégrale

$$\int\int \left[\frac{P(x, y, z)}{(x-a)^\alpha f'_z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{A(x, y, z)}{(x-a)^{\alpha-1}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{B(x, y, z)}{(x-a)^\alpha}\right] dx\, dy$$

soit de même forme que l'intégrale initiale, α étant remplacé par $\alpha - 1$. Il suffira que

$$P + (\alpha - 1)A f'_z - \left(f'_z \frac{\partial B}{\partial y} - f'_y \frac{\partial B}{\partial z}\right)$$

passe par la courbe $x = a$, $f(x, y, z) = 0$.

Prenons pour A et B des polynomes en y et ζ; on doit avoir

$$P(a, y, \zeta) + (\alpha - 1)A f'_\zeta - \left(f'_\zeta \frac{\partial B}{\partial y} - f'_y \frac{\partial B}{\partial \zeta}\right)$$

divisible par $f(a, y, \zeta)$; ou bien encore y et ζ étant deux lettres indépendantes, il faut mettre le polynome $P(a, y, \zeta)$ sous la forme

$$P(a, y, \zeta) = \lambda f'_y + \mu f'_\zeta + \nu f \qquad [\text{où } f \text{ désigne } f(a, y, \zeta)],$$

λ, μ et ν étant des polynomes en y et ζ.

Or, puisque le plan $x = a$ n'est pas tangent à la surface, la courbe $f(a, y, \zeta) = 0$ n'a pas de points multiples, les trois polynomes f, f'_y, f'_ζ ne s'annulent pas simultanément. De plus on peut tou-

jours supposer que les solutions communes aux deux équations

$$f = 0, \qquad f'_\zeta = 0$$

sont des solutions *simples*; il suffit que l'axe des ζ ne soit pas parallèle à une tangente d'inflexion de la courbe $f(a, y, \zeta) = 0$. Ceci posé, on peut choisir le polynome $\lambda(y, \zeta)$ de manière que la différence

$$P(a, y, \zeta) - \lambda f'_y$$

s'annule pour les points communs à

$$f = 0, \qquad f'_\zeta = 0.$$

On aura donc

$$P(a, y, \zeta) - \lambda f'_y = \mu f'_\zeta + \nu f,$$

μ et ν étant des polynomes en y et ζ, et de là se tirent A et B.

Nous pouvons donc conclure que, sous les hypothèses faites, *l'intégrale proposée se ramène à*

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x - a) f'_z}.$$

8. L'intégrale étant de seconde espèce, nous pouvons faire une réduction encore plus complète. En raisonnant comme au n° **6**, on voit que l'on doit avoir

$$\frac{P(a, y, \zeta)}{f'_\zeta} = \frac{\partial}{\partial y} B(a, y, \zeta) \qquad [f(a, y, \zeta) = 0].$$

La fraction rationnelle $B(a, y, \zeta)$ sera nécessairement un polynome $S(y, \zeta)$ en y et ζ [la courbe $f(a, y, \zeta) = 0$ n'ayant pas de point double]. Si l'on considère alors la différence

$$\int\int \left[\frac{P(x, y, z)}{(x - a) f'_z} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{S(y, z)}{x - a} \right] dx\, dy,$$

elle sera de la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

où P est un polynome. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

La surface $f(x, y, z) = 0$ n'ayant pas de singularités, et le plan $x = a$ n'étant pas tangent à la surface, une intégrale de seconde espèce de la forme

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z} \qquad (\text{P étant un polynome})$$

se ramène par la soustraction d'intégrales du type

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad (\text{U et V rationnels en } x, y \text{ et } z)$$

à une intégrale de la forme

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

P *étant toujours un polynome.*

9. Le même théorème subsiste si le plan $x = a$ est tangent à la surface. Nous pouvons le démontrer très facilement en nous reportant au résultat du n° 6. Par la soustraction d'une intégrale de forme convenable, nous avons ramené l'intégrale

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z}$$

à la forme

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{W(y) f'_z},$$

chaque racine b de $W(y)$ correspondant à un point où la courbe

$$f(a, y, z) = 0$$

a sa tangente parallèle à l'axe des z. Or, les axes occupant une position arbitraire par rapport à la surface, on peut supposer qu'aucun des

plans $y = b$ n'est tangent à la surface. Nous sommes donc ramené au cas précédent (x et y étant permutés), et *nous avons le théorème énoncé à la fin du numéro précédent, même si le plan $x = a$ est tangent à la surface.*

10. Nous avons supposé que les axes occupent une position arbitraire par rapport à la surface; les plans considérés $x = a$ coupaient alors la surface suivant une courbe irréductible. Il est facile d'examiner le cas où il en serait autrement. Supposons que le plan $x = a$ coupe la surface suivant une courbe décomposable en *deux* autres, et soit A un point commun à ces deux courbes. Reprenons l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z}.$$

Nous pouvons d'ailleurs, comme plus haut, faire les réductions qui nous ramèneront à l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)\,W(y) f'_z}.$$

On peut, dans le voisinage de A, retrancher une intégrale double de la forme

$$\int\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

de telle sorte que la différence reste finie dans le voisinage du point. En raisonnant, comme au n° **6**, on voit que cette dernière intégrale est de la forme

$$\int\int \frac{1}{x-a} \frac{\partial}{\partial y} B(x, y, z)\,dx\,dy,$$

la fraction rationnelle $B(x, y, z)$ ne devenant pas identiquement infinie sur la section plane $x = a$. Il n'y a dans tout ceci aucune différence avec le n° **6**, si ce n'est que dans ce numéro nous nous placions au voisinage d'un point *quelconque* de la section plane, tandis que nous nous plaçons ici au voisinage du point *particulier* A; d'ailleurs, la courbe désignée (*loc. cit.*) par (γ) est l'ensemble des deux courbes

passant par le point A. On aura donc

$$\frac{P(a, y, z)}{W(y) f'_z(a, y, z)} = \frac{\partial}{\partial y} B(a, y, z),$$

pour l'une et l'autre courbe que définit l'équation $f(a, y, z) = 0$. Or, on peut toujours mettre la fonction rationnelle $B(x, y, z)$ sous la forme

$$B(x, y, z) = \frac{Q(x, y, z)}{R(x, y)} \qquad \text{(Q étant un polynome)},$$

le polynome $R(x, y)$ ne contenant pas $(x - a)$ en facteur (sinon B serait infinie au moins sur une des courbes de la section $x = a$). Si donc de l'intégrale proposée

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x - a) W(y) f'_z}$$

on retranche

$$\int\int \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{x - a} \frac{Q(x, y, z)}{R(a, y)}\right] dx\, dy,$$

on aura une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{W(y) f'_z},$$

$W(y)$ étant un polynome en y. Comme le plan des zx peut être supposé avoir une direction arbitraire, on peut admettre qu'aucun plan de la forme

$$y = C$$

ne coupe la surface suivant une courbe décomposable (en faisant abstraction de la surface de Steiner et des surfaces réglées), et finalement nous arrivons à la même conclusion qu'au numéro précédent.

Les considérations précédentes peuvent servir, d'une manière plus générale, à faire la réduction de l'intégrale de seconde espèce

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x - a)^\alpha R(x, y) f'_z},$$

le polynome $R(x, y)$ ne contenant pas $x - a$ en facteur; on ramènera cette intégrale, par la soustraction d'une intégrale de la forme déjà tant de fois indiquée, à l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{V(y)\,R(x, y)\,f'_z}.$$

11. En restant toujours dans le cas d'une surface sans singularités, nous allons enfin considérer une intégrale arbitraire de seconde espèce. Les axes étant pris arbitrairement, nous pouvons supposer que l'intégrale reste en général finie dans le voisinage d'un point pour lequel $f'_z = 0$; de plus C étant une ligne irréductible de la surface pour les points de laquelle l'intégrale peut devenir infinie, soit

$$R(x, y) = 0$$

la courbe irréductible qui est la projection de la ligne C sur le plan des xy. La surface cylindrique

$$R(x, y) = 0$$

pourra couper la surface f suivant une autre ligne irréductible que la ligne C.

Soit Γ cette seconde ligne; les courbes C et Γ ont au moins un point commun à distance finie que nous désignerons par A. L'intégrale double considérée peut évidemment se mettre sous la forme d'une somme d'intégrales du type

$$(\varepsilon) \qquad \int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{W(y)\,[R(x, y)]^\alpha f'_z}.$$

En effet, toute fraction rationnelle de x, y, z peut s'écrire

$$\frac{A(x, y, z)}{B(x, y)},$$

A et B étant deux polynomes, le premier en x, y, z, le second en x

et y. En regardant

$$\frac{1}{B(x, y)}$$

comme une fraction rationnelle de x, on la décomposera en fractions plus simples, dont les dénominateurs, en tant que polynomes en x, soient premiers entre eux et puissances d'un polynome en x et y; mais dans cette décomposition pourront s'introduire au dénominateur des polynomes en y, figurés par $V(y)$. Considérons donc l'intégrale (ε); dans le voisinage du point A, on doit pouvoir trouver deux fractions rationnelles $S(x, y, z)$ et $T(x, y, z)$ telles que la différence

$$\int\int\left\{\frac{P(x, y, z)}{f'_z W(y)[R(x, y)]^\alpha} - \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y}\right\}dx\,dy$$

reste finie dans le voisinage de A. En décomposant S et T en fractions simples, nous avons, pour la somme $\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}$, des éléments de la forme

$$\frac{H(x, y, z)}{W_1(y)[\rho(x, y)]^\lambda f'_z}.$$

En se bornant, dans S et T, au terme renfermant nécessairement en dénominateur une puissance de R, nous avons une intégrale de la forme

$$\int\int\frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{W(y)[R(x, y)]^\beta f'_z},$$

qui, dans le voisinage de A (ce point pouvant être exclu), ne devient pas infinie sur la courbe

$$R(x, y) = 0,$$

c'est-à-dire sur les deux courbes C et Γ; il faut donc que

$$\frac{P(x, y, z)}{[R(x, y)]^\beta}$$

reste finie pour $R(x, y) = 0$, dans le voisinage de A, et, par suite,

soit un polynome en x, y et z (on peut appliquer ici un théorème classique de Nœther, puisque C et Γ forment l'intersection complète de $R = 0$ avec la surface f).

On voit donc que finalement l'intégrale sera ramenée à

$$(\tau_1) \qquad \iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{W(y) f'_z},$$

et finalement à

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}.$$

Nous avons donc la proposition fondamentale suivante :

Si l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

représente une surface sans singularités, toutes les intégrales de seconde espèce relatives à cette surface sont de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy + \iint \frac{P(x, y, z)}{f'_z}\, dx\, dy,$$

U *et* V *étant des fonctions rationnelles en* x, y *et* z, *et* $P(x, y, z)$ *représentant un polynome.*

IV. — Même réduction pour les surfaces quelconques.

12. Le théorème que nous venons d'établir est général. Une partie de la démonstration précédente subsiste entièrement ; c'est celle qui est contenue dans le numéro précédent et qui s'arrête à la forme (τ_1). En permutant x et y, nous voyons donc que toutes les intégrales de seconde espèce se ramènent aux intégrales

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{W(x) f'_z},$$

et nous devons donc étudier les intégrales de la forme

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x - a)^\alpha f'_z}.$$

La surface, nous pouvons le supposer, n'a que des singularités ordinaires (une ligne double avec points triples). On peut, de plus, admettre que l'intégrale initiale ne devient pas, *en général*, infinie le long de la ligne double (il suffirait, s'il en était autrement, de faire une transformation birationnelle convenable); *il en résulte que* P *s'annule le long de la courbe double*. Enfin les axes de coordonnées ont une position arbitraire par rapport à la surface.

Supposons d'abord que le plan $x = a$ ne passe pas par un point-pince ou par un point triple de la courbe double. Il y a alors peu de modifications à faire à la réduction du n° **7**. Reprenons les notations et les calculs de ce numéro; nous devons chercher à mettre $P(a, y, \zeta)$ sous la forme

$$\lambda f'_y + \mu f'_\zeta + \nu f.$$

Le polynome $P(a, y, \zeta)$ s'annule d'ailleurs pour les points doubles de la courbe

$$f(a, y, \zeta) = 0.$$

Ici les trois polynomes f, f'_y, f'_ζ s'annulent simultanément, mais on peut supposer que f et f'_y n'ont de tangente commune en aucun de leurs points de rencontre. Il s'agit alors de savoir si l'on peut déterminer un polynome μ en y et ζ, de telle sorte que la différence

$$P - \mu f'_\zeta$$

soit de la forme $\lambda f'_y + \nu f$. Les points communs à

$$f = 0 \qquad \text{et} \qquad f'_y = 0$$

sont de deux sortes; les uns sont des points simples de f et n'appartiennent pas, par suite, à $f'_\zeta = 0$. On peut choisir le polynome μ de telle sorte que la différence $P - \mu f'_\zeta$ s'annule en ces points. Les autres sont points doubles de f; la différence précédente s'annule en ces points; mais il faut de plus que, pour chacun de ces points, la courbe

$$P - \mu f'_\zeta = 0$$

ait même tangente que la courbe $f'_y = 0$, et il est clair que l'on peut choisir μ de façon qu'il en soit ainsi, puisque $f'_y = 0$ et $f'_z = 0$ ne sont pas tangentes en ces points.

Nous pouvons donc encore conclure que *le cas de α quelconque se ramène à $\alpha = 1$.*

15. On ne peut pas faire la même réduction si le plan *$x = a$ passe par un point-pince.* Pour qu'elle soit possible, c'est-à-dire pour qu'on puisse mettre $P(a, y, \zeta)$ sous la forme voulue, il faut et il suffit que la tangente à la courbe

$$P(a, y, \zeta) = 0,$$

au point-pince, soit la tangente au point de rebroussement dans la section plane $x = a$ (¹).

Or, pour l'intégrale considérée

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z},$$

la condition relative à la tangente pour la courbe $P(a, y, \zeta) = 0$ n'est pas remplie en général. Nous allons montrer que l'on peut, par une soustraction convenable, être ramené à une intégrale de même forme, mais où la condition voulue sera remplie. Commençons par quelques remarques très importantes pour la suite.

(¹) On établit facilement que, si

$$f(x, y) = 0$$

représente une courbe ayant des points doubles et des points de rebroussement ordinaires, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynome $P(x, y)$ soit susceptible de se mettre sous la forme

$$\lambda f + \mu f'_y + \nu f'_x \qquad (\lambda, \mu, \nu \text{ étant des polynomes}),$$

est que la courbe $P = 0$ passe par les points doubles de f, et aussi par les points de rebroussement avec la tangente à f en ces derniers points comme tangente.

14. J'envisage les expressions de la forme

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right),$$

U et V étant des polynomes en x, y, z.

Cherchons à quelle condition cette expression est de la forme

$$(\beta) \qquad \frac{M(x, y, z)}{f'_z},$$

$M(x, y, z)$ étant un polynome en x, y et z. En développant l'expression ci-dessus, on a

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{f'_z} + \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{f'_z} - \frac{\frac{\partial U}{\partial z}f'_y}{f'^2_z} - \frac{\frac{\partial V}{\partial z}f'_x}{f'^2_z} - \frac{U}{f'^2_z}\left(f''_{zy} - f''_{z^2}\frac{f'_y}{f'_z}\right) - \frac{V}{f'^2_z}\left(f''_{zx} - f''_{z^2}\frac{f'_x}{f'_z}\right).$$

Il n'y aura pas de terme en $\frac{1}{f'^3_z}$ si $Uf'_y + Vf'_x$ est divisible par f'_z, c'est-à-dire si l'on a l'identité en x, y et z,

$$(\gamma) \qquad Uf'_y + Vf'_x = Af'_z + Bf,$$

A et B étant deux polynomes. Nous allons voir que, dans ces conditions, l'expression proposée a la forme demandée. Il suffit de montrer qu'il ne reste pas alors de terme en $\frac{1}{f'^2_z}$; or le coefficient de $\frac{1}{f'^2_z}$ est égal à

$$-\frac{\partial U}{\partial z}f'_y - \frac{\partial V}{\partial z}f'_x - Uf''_{zy} - Vf''_{zx} + Af''_{z^2}.$$

En différentiant par rapport à z l'identité à laquelle satisfont U et V, on voit de suite que ce coefficient est de la forme

$$Kf'_z + Hf,$$

K et H étant des polynomes, et l'on a

$$K = -\frac{\partial A}{\partial z} - B.$$

Donc, l'expression (α) *sera de la forme* (β), *si* U *et* V *satisfont à l'identité* (γ) *en* x, y *et* z.

15. Revenons maintenant au n° **13**. Pour pouvoir ramener au cas de $\alpha = 1$, en suivant la méthode employée aux n^os **7** et **12**, il faudrait que dans l'expression

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^{\alpha} f'_z},$$

le polynome $P(x, y, z)$ qui s'annule le long de la courbe double fût tel que la courbe

$$P(a, y, z) = 0$$

eût, comme tangente au point-pince, la tangente au point de rebroussement de la courbe $f(a, y, z) = 0$. S'il n'en est pas ainsi, nous allons montrer qu'on peut faire une première transformation réalisant cette condition. Formons la combinaison

$$\frac{P(x, y, z)}{(x-a)^{\alpha} f'_z} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{U}{(x-a)^{\alpha-1} f'_z}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{V}{(x-a)^{\alpha-1} f'_z}\right],$$

qui peut s'écrire

$$\frac{P(x, y, z) + (\alpha - 1)V}{(x-a)^{\alpha} f'_z} - \frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right].$$

Prenons pour U un polynome tel que la surface $U = 0$ passe par la courbe double et par la courbe simple de rencontre de $f = 0$ et $f'_z = 0$; de même prenons pour V un polynome satisfaisant aux mêmes conditions, en ajoutant en plus la condition que la surface

$$P(x, y, z) + (\alpha - 1)V = 0,$$

soit tangente au point-pince à la tangente à $f(a, y, z) = 0$ dans le plan $x = a$, et cette dernière condition peut évidemment être réalisée. D'autre part la surface

$$U f'_y + V f'_x = 0$$

a pour ligne double la courbe double de f et passe, comme $U=0$ et $V=0$, par la ligne *simple* de rencontre de $f=0$ et $f'_z=0$; on a donc

$$Uf'_y + Vf_x = \Lambda f'_z + Kf.$$

Enfin $\frac{U}{f'_z}$ et $\frac{V}{f'_z}$ restant en général finies sur la courbe double, l'expression

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right)$$

sera de la forme

$$\frac{M(x, y, z)}{f'_z},$$

M étant un polynome s'annulant sur la courbe double. Donc, par la soustraction effectuée, l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z},$$

est remplacée par l'intégrale

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z},$$

où α a la même valeur mais où le polynome Q satisfait à la condition nécessaire pour notre réduction ultérieure, condition à laquelle ne satisfaisait pas P.

Nous concluons de là que, *si le plan $x=a$ passe par un point-pince, l'intégrale*

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z}$$

peut, comme quand le plan ne passait pas par un point-pince, être ramenée au cas de $\alpha=1$.

Une démonstration analogue s'applique, avec peu de modifications, au cas où le plan $x=a$ passe par un point triple de la courbe double, et nous pouvons par conséquent conclure que *toutes les intégrales de seconde espèce se ramènent à la forme*

$$\int\int \frac{B(x, y, z)}{(x-a)f'_z}\,dx\,dy.$$

16. Allons encore plus loin, et établissons que l'on peut faire disparaître le facteur $x - a$ du dénominateur. Nous partons de l'intégrale supposée de seconde espèce

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)f'_z},$$

[$P(x, y, z)$ s'annulant sur la courbe double].

Nous savons (nº **6**) que dans le voisinage d'un point de la section plane $x = a$, on obtiendra une intégrale restant finie dans le voisinage de ce point en retranchant de l'intégrale précédente une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{B(x, y, z)}{x-a}\right] dx\,dy,$$

[$B(x, y, z)$ étant une fonction rationnelle de x, y et z ne devenant pas identiquement infinie pour $x = a$]. Il résulte de là que l'on a

$$\frac{P(a, y, \zeta)}{f'_\zeta} = \frac{\partial}{\partial y}[B(a, y, \zeta)] \qquad [f(a, y, \zeta) = 0].$$

La courbe $f(a, y, \zeta) = 0$ ayant des points singuliers, nous ne pouvons pas conclure, comme au nº **8**, que $B(a, y, \zeta)$ est un polynome en y et ζ, mais il résulte des théorèmes les plus simples sur les fonctions algébriques d'une variable, que l'on peut écrire

$$B(a, y, \zeta) = \frac{M(y, \zeta)}{f'_\zeta},$$

$M(y, \zeta)$ étant un polynome en y et ζ qui s'annule pour les points de la courbe $f(a, y, \zeta) = 0$, qui correspondent à $f'_\zeta = 0$ (si la courbe a un point triple, la courbe $M(y, \zeta) = 0$, aura ce point comme point double). Ceci posé, nous allons chercher à former un polynome $Q(x, y, z)$ tel que la surface

$$Q(x, y, z) = 0,$$

passe par les deux courbes de rencontre des surfaces

$$f = 0, \qquad f'_z = 0,$$

(dont l'une est la courbe double que nous appellerons Γ, tandis que l'autre C représentera le lieu des points simples de la surface où le plan tangent est parallèle à l'axe des z), et que l'on ait

$$Q(a, y, z) = M(y, z) + \theta(y, z) f(a, y, z),$$

$\theta(y, z)$ étant un polynome arbitraire, et où, comme nous l'avons dit, le polynome $M(y, z)$ s'annule aux points doubles de la courbe

$$f(a, y, z) = 0,$$

et aux points simples de cette courbe où la tangente est parallèle à Oz. [Dans le cas où le plan $x = a$ passerait par un point commun à C et Γ, la tangente à la courbe $M(y, z) = 0$ en ce point serait parallèle à l'axe des z]. La question revient à trouver une surface

$$Q(x, y, z) = 0,$$

passant par C et Γ, et coupant *à distance finie* le plan $x = a$ seulement suivant la courbe $M(y, z) + \theta(y, z) f(a, y, z) = 0$.

La possibilité de cette recherche résulte du théorème général suivant dû à M. Castelnuovo sur les systèmes linéaires de surfaces : *Un système linéaire complet de surfaces défini par des lignes-bases et par des points-bases découpe sur un plan arbitraire un système* complet (*régulier*) *de courbes, pourvu que le degré des surfaces dépasse une certaine limite*. Nous appliquerons ce théorème au système linéaire complet Σ des surfaces de degré λ passant simplement par C et Γ, et aux sections par le plan $x = a$. Le système linéaire Σ découpe sur le plan $x = a$ le système complet σ des courbes de ce plan passant par les points où il rencontre C et Γ (si $x = a$ passe par un point P commun à C et à Γ les courbes du système plan ont une tangente déterminée, intersection du plan tangent à la surface en P avec le plan $x = a$), pourvu que le degré λ des surfaces soit assez grand. Parmi les courbes du système σ se trouve, si λ est pris assez grand, la courbe composée formée de la courbe

$$(\alpha) \qquad M(y, z) + \theta(y, z) f(a, y, z) = 0$$

et de la droite à l'infini répétée un nombre convenable de fois. Il y aura donc, d'après le théorème de M. Castelnuovo, une surface

$$Q(x, y, z) = 0,$$

coupant le plan $x = a$ suivant la courbe (α) et la droite à l'infini avec un certain degré de multiplicité; le polynome Q remplira les conditions requises.

On voit alors que l'intégrale à soustraire peut être prise égale à

$$\int\int \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{Q(x, y, z)}{(x-a)f'_z}\right] dx\, dy.$$

D'ailleurs, l'expression

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{Q(x, y, z)}{f'_z}\right]$$

sera de la forme

$$\frac{R(x, y, z)}{f'_z} \qquad (\text{R étant un polynome})$$

puisque le polynome Qf_y sera nécessairement de la forme $Af'_z + Kf$ (n° **14**), notre intégrale, par la soustraction de l'intégrale ci-dessus, est donc ramenée à

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}.$$

Nous arrivons donc finalement au théorème déjà obtenu pour les surfaces sans singularités :

Étant donnée une surface

$$f(x, y, z) = 0$$

que l'on peut supposer à singularités ordinaires (une ligne double avec des points triples), toutes les intégrales doubles de seconde espèce relatives à cette surface, se ramènent par la soustraction

d'une intégrale de la forme

$$\int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy$$

(U et V rationnelles en x, y et z) *au type*

$$\int\int\frac{P(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

$P(x, y, z)$ *étant un polynome qui s'annule pour la courbe double.*

V. — Théorème fondamental sur le nombre limité des intégrales de seconde espèce.

17. Il s'agit maintenant de montrer que les intégrales de *seconde espèce*

$$\text{(I)}\qquad \int\int\frac{P(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

se ramènent à un nombre *limité* d'entre elles. Nous ferons cette réduction en retranchant de l'intégrale précédente une intégrale

$$\int\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right]dx\,dy,$$

où U et V sont des polynomes.

18. Partons de l'intégrale (I), où le polynome

$$P(x,y,z)$$

est de degré p, et désignons par $P_1(x, y, z)$ l'ensemble des termes homogènes et de degré p dans P. Posons

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} U = yP_1 + H, \\ V = xP_1 + K. \end{cases}$$

H et K étant des polynomes de degré p en x, y et z. *On peut choisir, si p est assez grand, les polynomes* H *et* K *de degré p, de telle manière que l'on ait l'identité*

$$Uf'_y + Vf'_x = Af'_z + Bf \qquad \text{(A et B étant des polynomes)}.$$

identité qui peut s'écrire

$$P_1(yf'_y + xf'_x) + Hf'_y + Kf'_x = Af'_z + Bf.$$

Pour légitimer cette assertion, nous n'avons qu'à nous appuyer sur la proposition de M. Castelnuovo dont nous avons déjà fait usage (n° **16**). Considérons la surface Φ représentée par l'équation

$$(\Phi) \qquad Uf'_y + Vf'_x = 0.$$

Elle passe par les deux courbes définies par les équations

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0.$$

L'une de ces courbes Γ est la ligne double de f; désignons l'autre par C. Les axes ayant été pris arbitrairement, on peut supposer que C et Γ sont des lignes simples de rencontre de $f'_x = 0$, $f'_y = 0$. Ensuite Φ coupe le plan de l'infini, suivant la ligne

$$(\gamma) \qquad t = 0, \qquad P_1(y\varphi'_y + x\varphi'_x) = 0,$$

en introduisant la quatrième coordonnée homogène t, et en désignant par φ l'ensemble des termes homogènes de plus haut degré m dans f. Réciproquement, toute surface de degré p passant par les courbes C et Γ et contenant la ligne plane (γ) a le premier membre de son équation de la forme

$$Uf'_y + Vf'_x,$$

où U et V sont des polynomes de la forme (α).

D'autre part, la surface Φ est aussi représentée par l'équation

$$Af'_z + Bf = 0.$$

Elle passe donc par la courbe simple D de la surface f, définie par les équations

$$f = 0, \qquad f'_z = 0.$$

De plus, elle passe, comme nous le savions déjà, par la ligne double, mais nous voyons maintenant que Φ est tangent à la surface

$$f'_z = 0,$$

le long de la ligne double Γ; réciproquement, toute surface passant par D et par Γ, et étant tangente à $f'_z = 0$ le long de Γ, a le premier membre de son équation de la forme

$$\mathrm{A} f'_z + \mathrm{B} f.$$

Considérons alors le système linéaire Σ des surfaces de degré $m + p$ défini par les lignes bases simples C, D et Γ, avec la condition que le long de Γ ces surfaces soient tangentes à $f'_z = 0$. Si p est assez grand, et par suite $m + p$, ce système linéaire découpera sur le plan de l'infini

$$t = 0$$

le système linéaire *complet* de courbes de degré $m + p$, caractérisé par les points-bases simples qui sont les intersections du plan de l'infini avec les courbes C, D et Γ, avec la condition supplémentaire qu'aux points d'intersection du plan de l'infini avec la courbe Γ, la courbe soit tangente à la surface $f'_z = 0$. Or la courbe (γ), considérée plus haut, définie par les équations

$$t = 0, \qquad \mathrm{P}_1 (y \varphi'_{1y} + x \varphi'_{1x}) = 0,$$

satisfait bien à ces diverses conditions, car la courbe

$$t = 0, \qquad y \varphi'_{1y} + x \varphi'_{1x} = 0$$

qu'elle contient partiellement, passe par les points à l'infini de C, D et Γ. Les points à l'infini de Γ satisfaisant aux équations

$$t = 0, \qquad \varphi'_{1z} = 0, \qquad \varphi_1 = 0,$$

la courbe $y\varphi'_y + x\varphi'_x = 0$ dont l'équation peut s'écrire

$$-z\varphi'_z + m\varphi = 0$$

est bien tangente à $\varphi'_z = 0$ aux points doubles de φ.

Donc, si p est assez grand, nous pourrons certainement trouver une surface du système linéaire Σ, donnée soit par l'équation

$$Uf'_y + Vf'_x = 0,$$

soit par l'équation qui lui est identique

$$Af'_z + Bf = 0,$$

où U et V ont la forme (α).

19. Nous allons facilement achever la démonstration. Après avoir déterminé U et V comme il vient d'être dit, formons la différence

$$\frac{P(x, y, z)}{f'_z} - \frac{1}{p-m+3}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right];$$

nous allons voir qu'elle est de la forme

$$\frac{Q(x, y, z)}{f'_z},$$

où Q est seulement de degré $p-1$, tandis que P était de degré p. On a l'identité en x, y, z

$$Uf'_y + Vf'_x = Af'_z + Bf,$$

A et B étant des polynomes respectivement de degré $p+1$ et p. D'après le calcul du n° **14**, on a sur la surface $f = 0$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right) = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial A}{\partial z} - B}{f'_z}.$$

Or, soient dans U, V, A, B les termes homogènes de plus haut degré

en x, y, z représentés respectivement par u, v, a, b; on aura d'abord

$$u = y\mathrm{P}_1, \qquad v = x\mathrm{P}_1,$$

donc

$$\mathrm{P}_1(y\varphi'_y + x\varphi'_x) = a\varphi'_z + b\varphi,$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{P}_1(-z\varphi'_z + m\varphi) = a\varphi'_z + b\varphi,$$

d'où se conclut

$$\left.\begin{aligned} a &= -\mathrm{P}_1 z + \lambda\varphi \\ b &= m\mathrm{P}_1 - \lambda\varphi'_z \end{aligned}\right\} \quad (\lambda \text{ polyn. homog. en } x, y, z \text{ de degré } p+1-m).$$

On aura donc, comme on le vérifie immédiatement,

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z} - b = (p - m + 3)\mathrm{P}_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\varphi.$$

On pourra par suite, *sur la surface f*, écrire

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} - \mathrm{B} = (p - m + 3)\mathrm{P}_1(x, y, z) + \mathrm{Q}(x, y, z),$$

$\mathrm{Q}(x, y, z)$ étant un polynome de degré $p - 1$ au plus. Nous concluons donc de là qu'on peut passer de l'intégrale

$$\int\int \frac{\mathrm{P}(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

où P est un polynome de degré p, à une intégrale de même forme où P sera seulement de degré $p - 1$, pourvu que p dépasse une certaine limite.

20. Nous pouvons enfin déduire de toutes les transformations précédentes le théorème fondamental relatif au nombre limité des intégrales distinctes de seconde espèce. Convenons de dire que *des intégrales de seconde espèce sont distinctes*, si aucune combinaison

linéaire de ces intégrales n'est de la forme

$$\int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

U et V étant rationnelles en x, y, z.

Le théorème fondamental sur les intégrales doubles de seconde espèce est alors le suivant :

Il n'y a pour une surface algébrique qu'un nombre limité d'intégrales doubles distinctes de seconde espèce.

Ou encore :

Il existe pour une surface algébrique un certain nombre ρ d'intégrales doubles distinctes de seconde espèce

$$I_1, \quad I_2, \quad \ldots, \quad I_\rho,$$

telles que toute autre intégrale double de seconde espèce est de la forme

$$\alpha_1 I_1+\alpha_2 I_2+\ldots+\alpha_\rho I_\rho+\int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

les α étant des constantes, et U et V des fonctions rationnelles de x, y, z.

21. La démonstration précédente s'applique à tous les cas. Pour établir que toutes les intégrales

$$\int\int\frac{P(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

se réduisent à un nombre fini d'entre elles, on pourrait se borner au cas où la surface est la plus générale de son degré.

En prenant pour $f(x, y, z)$ *un polynome arbitraire* de degré m, on peut chercher facilement une limite du degré p. Reprenons l'identité fondamentale

$$Uf'_y+Vf'_x=Af'_z+Bf,$$

en supposant que U et V sont de degré $p+1$. On a alors

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right) = \frac{Q(x, y, z)}{f'_z},$$

Q étant un polynome de degré p. Nous avons vu que dans $Q(x, y, z)$ l'ensemble des termes homogènes de degré p sera égal à un polynome homogène donné $P_1(x, y, z)$, si l'on a

$$\left.\begin{aligned} U &= yP_1 + H \\ V &= xP_1 + K \end{aligned}\right\} \qquad (\text{H et K polynomes de degré } p).$$

Formons alors l'identité

$$(\Phi) \qquad P_1(yf'_y + xf'_x) + Hf'_y + Kf'_x = Af'_z + Bf.$$

Dans $Hf'_y + Kf'_x$, où H et K sont des polynomes arbitraires de degré p, le nombre des arbitraires est égal à

$$2\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - \frac{(p-m+2)(p-m+3)(p-m+4)}{6}.$$

D'autre part, pour avoir une identité de la forme (Φ), il faut et il suffit que la surface obtenue en égalant à zéro le premier membre de cette identité, que nous appellerons la surface Φ, passe par la courbe gauche

$$(\gamma) \qquad f = 0, \qquad f'_z = 0.$$

Or, on sait que le nombre des conditions exprimant qu'une surface de degré μ passe par une courbe gauche sans point singulier de degré d et de genre π est égal à

$$\mu d - \pi + 1,$$

si μ est assez grand; dans le cas où la courbe est l'intersection complète de deux surfaces de degrés α et β, on doit avoir

$$\mu \geq \alpha + \beta - 3.$$

Dans la question actuelle

$$\mu = p + m, \qquad \pi = \frac{m(m-1)(2m-5)}{2} + 1.$$

De plus, la surface Φ a, quels que soient les arbitraires qui y figurent, un nombre de points communs avec la courbe (γ) égal à $m(m-1)$, et qui sont les $m(m-1)$ points à l'infini de (γ); le nombre des conditions est donc à diminuer de $m(m-1)$. Le nombre des paramètres sera au moins égal au nombre des conditions qui expriment que la surface Φ passe par la courbe (γ), si l'on a

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3} - \frac{(p-m+2)(p-m+3)(p-m+4)}{6}$$
$$> (p+m-1)m(m-1) - \frac{m(m-1)(2m-5)}{2}.$$

Si p_0 désigne le plus grand nombre entier positif *pour lequel cette inégalité n'est pas vérifiée*, on pourra ramener toute intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

à une intégrale de même forme, où le degré de P sera au plus p_0. On ne peut trouver pour p_0 une expression simple, mais on vérifie facilement que

$$p_0 \leq 2m - 4,$$

et l'on est par suite assuré *de pouvoir réduire à $2m - 4$ le degré du polynome* qui figure au numérateur de l'intégrale double.

VI. — Recherche des conditions pour qu'une intégrale double soit de seconde espèce.

22. Nous venons de montrer que toutes les intégrales de seconde espèce se ramènent par une soustraction convenable à la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

(le polynome P s'annulant sur la courbe double), où le degré p du polynome P est limité. Mais toutes les intégrales doubles de cette forme ne sont pas de *seconde espèce*. Il faut maintenant exprimer que cette intégrale est de seconde espèce.

Nous n'avons rien à exprimer pour ce qui regarde les points à distance finie de la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

Nous avons seulement à examiner les points à l'infini, en supposant d'ailleurs, comme il est permis, qu'avant toute réduction on ait fait une transformation homographique.

Posons

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{Y}{X}, \qquad z = \frac{Z}{X};$$

et soit alors $F(X, Y, Z) = 0$ l'équation de la surface transformée. L'intégrale prendra la forme

$$\int\int \frac{1}{X^{p-(m-4)}} \frac{H(X, Y, Z)}{F'_Z} dX\, dY,$$

$H(X, Y, Z)$ désignant un polynome qui s'annule pour la courbe double de F. Si p est au plus égal à $m-4$, l'intégrale est de première espèce. Soit donc

$$p > m - 4.$$

Par la soustraction d'une intégrale convenable de la forme (nos **7** et **12**)

$$\int\int \left\{ \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{A(X, Y, Z)}{X^{p-(m-3)}}\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{B(X, Y, Z)}{X^{p-(m-4)}}\right] \right\} dX\, dY,$$

on obtient une intégrale

$$\int\int \frac{1}{X} \frac{K(X, Y, Z)\, dX\, dY}{F'_Z},$$

$K(X, Y, Z)$ étant un polynome s'annulant pour la courbe double. D'après le no **16**, pour que cette intégrale ait sur la ligne $X = 0$ le

caractère d'une intégrale de seconde espèce, il faut et il suffit que l'expression

$$\frac{K(o, Y, Z)}{F'_Z(o, Y, Z)} \qquad [F(o, Y, Z) = o],$$

soit la dérivée d'une fonction rationnelle de Y et Z. On pourra reconnaître s'il en est effectivement ainsi, ce qui entraînera en général

$$2\pi + m - 1$$

conditions, en désignant par π le genre d'une section plane quelconque de la surface et par suite de la courbe $F(o, Y, Z) = o$. Les conditions reviennent en effet à écrire que l'intégrale abélienne

$$\int \frac{K(o, Y, Z)\, dY}{F'_Z(o, Y, Z)} \qquad [F(o, Y, Z) = o],$$

est algébrique; les 2π périodes cycliques doivent être donc nulles, et les m résidus relatifs aux points à l'infini, qui donnent seulement $m-1$ conditions. On sait d'ailleurs que toutes ces conditions s'expriment sous forme algébrique.

25. Toutes ces conditions étant remplies, nous sommes assuré que pour les points à l'infini de la surface

$$f(x, y, z) = o$$

qui correspondent à

$$X = o, \qquad Y = \text{une valeur finie},$$

les conditions pour que l'intégrale proposée soit de seconde espèce se trouvent vérifiées. Si l'on avait posé

$$x = \frac{X_1}{Y_1}, \qquad y = \frac{1}{Y_1}, \qquad z = \frac{Z_1}{Y_1},$$

on aurait eu l'intégrale

$$\iint \frac{1}{Y_1^{p-(m-3)}} \frac{H_1(X_1, Y_1, Z_1)}{F'_{1,Z_1}}\, dX_1\, dY_1 \qquad [F_1(X_1, Y_1, Z_1) = o].$$

Pour les points de la courbe $Y_1 = 0$, elle devrait en général avoir le caractère d'une intégrale de seconde espèce, puisque cette courbe correspond à $X = 0$. Donc pour tous les points à l'infini de la surface F_1 qui correspondent à $Y_1 = 0$ et à une valeur finie de X_1 se trouvent vérifiées les conditions pour que l'intégrale soit de seconde espèce. Mais on a

$$X_1 = \frac{1}{Y}, \qquad Y_1 = \frac{X}{Y},$$

donc aux points de F exclus plus haut pour lesquels

$$X = 0, \qquad Y = \infty,$$

correspondent sur F_1

$$X_1 = 0, \qquad Y_1 = 0$$

et par suite pour les points à l'infini de la surface f pour lesquels

$$X = 0, \qquad Y = \infty$$

les conditions relatives à la nature de l'intégrale double sont bien vérifiées.

Il reste enfin à examiner les points à l'infini de la surface f pour lesquels

$$x = \text{une valeur finie}, \qquad y = \infty;$$

comme ils correspondent nécessairement sur F_1 à des points pour lesquels

$$Y_1 = 0, \qquad X_1 = 0,$$

la conclusion est immédiate, et les conditions voulues sont vérifiées.

Ainsi donc *nous savons exprimer que l'intégrale double*

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

(le polynome P s'annulant sur la courbe double) *est une intégrale double de seconde espèce.*

Ceci revient à exprimer qu'une certaine intégrale abélienne est algé-

brique; *le nombre des conditions est en général égal à*

$$2\pi + m - 1,$$

π désignant le genre d'une section plane quelconque de la surface.

VII. — Caractère invariant de l'intégrale de seconde espèce.

24. Nous avons maintenant à montrer qu'une intégrale double de seconde espèce reste une intégrale de seconde espèce quand on effectue sur la surface une transformation birationnelle. Nous avons déjà vu (n° **2**) que *la forme* des expressions

$$(1) \qquad \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dy$$

est invariante relativement à toute transformation birationnelle, mais cela ne suffit pas pour établir l'invariance des intégrales de seconde espèce. La difficulté provient des points fondamentaux que peuvent posséder les transformations birationnelles. Soit, sur la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

un point A, que l'on peut évidemment supposer simple, qui soit un point fondamental de la transformation, c'est-à-dire qu'au point A de f correspond sur la surface transformée

$$F(X, Y, Z) = 0$$

une certaine ligne. Envisageons une intégrale I de seconde espèce de la surface F et recherchons si sa transformée i relative à la surface f possède au point A le caractère d'une intégrale double de seconde espèce. L'intégrale i pourra devenir infinie le long de certaines lignes

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \ldots, \quad \Gamma_k$$

passant par le point A; il résulte de ce que i est la transformée d'une

intégrale de seconde espèce de la surface F que l'on peut retrancher de l'intégrale i une intégrale double de la forme

$$(h = 1, 2, \ldots, k) \qquad \iint \left(\frac{\partial U_h}{\partial x} + \frac{\partial V_h}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad \left\{ \begin{array}{l} (U_h \text{ et } V_h \text{ ration-} \\ \text{nelles en } x, y \text{ et } z) \end{array} \right.$$

telle que la différence de ces deux intégrales reste finie dans le voisinage de A sur la courbe Γ_h (en dehors de A). Nous allons voir que cela suffit pour affirmer que l'intégrale i présente en A le caractère d'une intégrale de seconde espèce.

Les axes de coordonnées étant supposés arbitrairement situés par rapport à la surface, nous écrirons i sous la forme

$$(i) \qquad \iint \frac{A(x, y, z)}{[R_1(x, y)]^{\alpha_1} \ldots [R_k(x, y)]^{\alpha_k} f'_z}\, dx\,dy,$$

les polynomes R de x et y étant irréductibles et premiers entre eux, et s'annulant en A, tandis que $A(x, y, z)$ est une fraction rationnelle de x, y, z qui reste finie en ce point. On peut, par hypothèse, retrancher de i une intégrale

$$\iint \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

telle que la différence des deux intégrales reste finie dans le voisinage de A sur la ligne Γ_1 (en dehors de A); nous supposons que pour Γ_1 on ait $R_1(x, y) = 0$. En décomposant, comme nous l'avons fait tant de fois, U_1 et V_1 en éléments simples, nous ferons ainsi disparaître R_1 du dénominateur, mais en introduisant à la place une certaine puissance de $x - a$ (on désigne par a l'abscisse de A). En continuant ainsi de proche en proche, nous retranchons de i une intégrale de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

de telle sorte que la différence soit de la forme

$$(j) \qquad \iint \frac{B(x, y, z)}{(x - a)^{\alpha} f'_z}\, dx\,dy,$$

la fraction rationnelle B étant finie en A. Cette dernière intégrale j est évidemment telle que l'on peut en retrancher une intégrale de la forme tant de fois considérée, de façon que la différence reste finie dans le voisinage de A (en dehors de A) sur la ligne $x = a$.

En faisant les réductions les plus élémentaires, nous sommes ramené au cas de $\alpha = 1$ et nous avons, par suite, en ayant fait seulement des soustractions du type voulu, l'intégrale

$$(2) \qquad \int\int \frac{C(x, y, z)}{(x-a)f'_z}\,dx\,dy,$$

$C(x, y, z)$ étant finie et déterminée en A. Nous pouvons d'ailleurs supposer que la courbe pour laquelle on a

$$\frac{1}{C(x, y, z)} = 0,$$

ne rencontre pas le plan $x = a$ en un point dont la coordonnée y soit égale à b (en désignant par b la seconde coordonnée de A): dans le cas contraire, en effet, il suffirait de faire tourner les axes Oy et Oz dans le plan des zy sans changer l'axe Ox.

Ceci posé, d'après nos hypothèses, on peut retrancher de l'intégrale (2) une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{R(x, y, z)}{x-a}\right]dx\,dy$$

[où $R(x, y, z)$ est une fonction rationnelle], et telle que la différence des deux intégrales reste finie dans le voisinage de A (en dehors de A) sur la ligne $x = a$. Ceci entraîne l'identité

$$\frac{C(a, y, \zeta)}{f'_\zeta(a, y, \zeta)} = \frac{\partial}{\partial y}R(a, y, \zeta) \qquad [\text{sur la courbe } f(a, y, \zeta) = 0].$$

D'après ce que nous avons dit, la fonction rationnelle $C(a, y, \zeta)$ reste finie pour les points de la courbe $f(a, y, \zeta) = 0$, qui correspondent à $y = b$. Donc, on peut mettre l'expression

$$R(a, y, \zeta),$$

sous la forme

$$\frac{M(y, \zeta)}{R(y)},$$

M étant un polynome en y et ζ, et $R(y)$ ne s'annulant pas pour $y = b$. Par suite, si l'on retranche de l'intégrale (2) l'intégrale

$$\iint \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{M(y, z)}{(x-a)R(y)}\right] dx\, dy,$$

on aura une différence qui sera de la forme

$$\iint S(x, y, z)\, dx\, dy,$$

la fraction rationnelle S étant finie et déterminée au point A. Ceci montre que l'intégrale (2) et, *par suite, l'intégrale initiale i présentent en A ce que nous avons appelé le caractère d'une intégrale double de seconde espèce.*

Ainsi se trouve établi *le caractère invariant de l'intégrale double de seconde espèce;* le nombre désigné par ρ au n° **20** est donc *un nombre invariant* pour toute transformation birationnelle.

VIII. — Quelques exemples.

25. Nous avons dit au début, que nous nous proposions seulement dans ce premier Mémoire de poser les bases de la théorie des intégrales doubles de seconde espèce, qui sera développée dans un second Travail. Indiquons donc seulement deux exemples, pour ne pas rester uniquement dans les généralités.

Considérons d'abord les intégrales de fonctions rationnelles

$$(1) \qquad \iint S(x, y)\, dx\, dy,$$

S étant une fonction rationnelle de deux variables indépendantes x et y. Il résulte immédiatement du théorème général du n° **11**, que de telles intégrales, quand elles sont de seconde espèce, peuvent par la

soustraction d'une expression

$$(2) \qquad \int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

être ramenées à la forme

$$(3) \qquad \int\int P(x, y)\,dx\,dy,$$

P étant un polynome. En effet, on peut regarder (1) comme une intégrale relative à la surface

$$z = ax + by + c.$$

D'autre part, il est manifeste que l'intégrale (3) peut s'écrire

$$\int\int\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy,$$

Q étant un polynome en x et y, car on peut toujours poser $P = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Donc, *toutes les intégrales doubles de seconde espèce de fonctions rationnelles de x et y sont de la forme* (2). Le nombre désigné plus haut par ρ est ici égal à zéro.

Il ne sera pas inutile de reprendre directement la démonstration du résultat précédent, sans s'appuyer sur aucun théorème général. Soit

$$S(x, y) = \frac{P(x, y)}{[R_1(x, y)]^{\alpha_1}\ldots[R_m(x, y)]^{\alpha_m}},$$

les R étant des polynomes irréductibles en x et y, que nous pouvons supposer contenir à la fois x et y, et premiers entre eux. Puisque l'intégrale (1) est de seconde espèce par hypothèse, on doit pouvoir retrancher de (1) une intégrale de la forme (2), telle que la différence reste finie dans le voisinage d'un point appartenant à la courbe

$$R_1(x, y) = 0.$$

Si nous décomposons U et V en éléments simples par rapport à y, relativement à chacun des polynomes R, nous avons

$$U = \sum \frac{A_i(x, y)}{[R_i(x, y)]^{k_i}}, \qquad V = \sum \frac{B_i(x, y)}{[R_i(x, y)]^{k_i}},$$

A_i et B_i étant des polynomes en y à coefficients rationnels en x. La différence

$$S(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{A_1(x, y)}{[R_1(x, y)]^{k_1}}\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{B_1(x, y)}{[R_1(x, y)]^{k_1}}\right\}$$

ne doit pas être identiquement infinie dans le voisinage d'un point arbitraire satisfaisant à la relation

$$R_1(x, y) = 0.$$

Par cette soustraction, nous faisons donc disparaître R_1 du dénominateur, en introduisant cependant à la place un polynome en x seul. En opérant maintenant relativement à R_2, et ainsi de suite, nous voyons que, par la soustraction d'une intégrale (2), nous ramenons l'intégrale de seconde espèce (1) à l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y)}{V(x)}\, dx\, dy,$$

P étant un polynome en x et y, et $V(x)$ un polynome en x.

Cette dernière intégrale est la somme d'intégrales

$$\int\int R(x) y^m\, dx\, dy,$$

[où $R(x)$ est une fraction rationnelle de x, et m un entier positif] que l'on peut écrire

$$\frac{1}{m+1}\int\int \frac{\partial}{\partial y}[R(x) y^{m+1}]\, dx\, dy;$$

elle est donc de la forme (2), et nous retrouvons bien le résultat annoncé.

26. Prenons encore, comme exemple, les surfaces qui correspondent

birationnellement à l'ensemble de deux courbes φ et ψ, c'est-à-dire les surfaces pour lesquelles on a

$$x = R_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta'),$$
$$y = R_2(\alpha, \beta, \alpha', \beta'), \qquad \left[\begin{array}{r} \varphi(\alpha, \beta) = 0 \\ \psi(\alpha', \beta') = 0 \end{array}\right],$$
$$z = R_3(\alpha, \beta, \alpha', \beta'),$$

les R étant rationnelles en α, β, α' et β', et cela de telle manière qu'à un point *arbitraire* (x, y, z) de la surface corresponde un seul couple (α, β) et (α', β'); nous désignerons par $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface.

Soit

$$(4) \qquad \int R(\alpha, \beta)\,d\alpha$$

une intégrale abélienne de seconde espèce, non rationnelle, de la courbe

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

que nous supposons de genre supérieur à zéro, et soit pareillement

$$(5) \qquad \int S(\alpha', \beta')\,d\alpha'$$

une intégrale de seconde espèce, non rationnelle, relative à la courbe de genre supérieur à zéro,

$$\psi(\alpha', \beta') = 0.$$

J'envisage l'intégrale double

$$\int\int R(\alpha, \beta)\,S(\alpha', \beta')\,d\alpha\,d\alpha',$$

qui est manifestement de la forme

$$(6) \qquad \int\int T(x, y, z)\,dx\,dy,$$

T étant rationnelle en x, y et z. Nous allons voir que cette intégrale est une intégrale de seconde espèce de la surface f. Les lignes, le long desquelles l'intégrale (6) devient infinie, correspondent aux pôles de l'intégrale (4) et aux pôles de l'intégrale (5). Si A est un pôle de (4) sur la courbe φ (on peut le supposer à distance finie), on a, dans le voisinage de ce point,

$$R(\alpha, \beta) = \frac{dU}{d\alpha} + \rho(\alpha, \beta),$$

ρ et U étant rationnelles en α et β, et ρ restant finie en A. L'intégrale peut donc s'écrire

$$\int\int\left(\frac{dU}{d\alpha} + \rho\right) S(\alpha', \beta')\, d\alpha\, d\alpha',$$

c'est-à-dire

$$\int\int \frac{\partial}{\partial\alpha}[U(\alpha, \beta)\, S(\alpha', \beta')]\, d\alpha\, d\alpha' + \int\int \rho S\, d\alpha\, d\alpha';$$

le premier terme seul devient infini pour un point de la surface f pris arbitrairement sur la ligne Γ qui correspond au point A de la courbe φ. Or, ce premier terme, d'après les généralités du n° **2**, est nécessairement de la forme

$$\int\int\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

U_1 et V_1 étant rationnelles en x, y et z. Donc, en un point arbitraire de la ligne Γ, l'intégrale (6) présente le caractère d'une intégrale de seconde espèce. Pour les pôles de ψ on raisonnerait de la même manière, et aussi pour les points correspondant à la fois aux pôles de φ et aux pôles de ψ, et nous arrivons bien à la conclusion que *l'intégrale* (6) *est une intégrale double de seconde espèce*.

Une question intéressante se pose immédiatement. Peut-on affirmer que l'intégrale (6) n'est pas réductible à une intégrale

$$\int\int\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy?$$

Il en est bien ainsi, comme nous allons l'établir. Il faudrait mon-

trer que l'on ne peut pas trouver des fonctions

$$U(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \quad \text{et} \quad V(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$$

rationnelles en α, β et α', β', telles que l'on ait ([1])

$$R(\alpha, \beta)S(\alpha', \beta') = \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha'}.$$

Nous ne suivrons pas cette voie algébrique qui exigerait des calculs assez longs, et nous emploierons un détour. Dans l'hypothèse de l'identité précédente on aurait

$$(7) \qquad \int\int R(\alpha, \beta)S(\alpha', \beta')\,d\alpha\,d\alpha' = \int\int\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha'}\right)d\alpha\,d\alpha'.$$

Or, traçons dans le plan de la variable complexe α un cycle C relatif à la fonction algébrique β de α définie par

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

et soit de même, dans le plan α', un cycle C' relatif à ψ. On peut supposer que les intégrales

$$\int_C R(\alpha, \beta)\,d\alpha = \omega, \qquad \int_{C'} S(\alpha', \beta')\,d\alpha' = \omega'$$

ne sont pas nulles et nous aurons, en prenant l'intégrale qui figure au premier membre de (7), le long du continuum à deux dimensions correspondant à l'ensemble de C et C', la valeur

$$\omega\omega' \qquad \text{(différente de zéro)}.$$

Passons au second membre de (7); il est possible que U et V deviennent infinies en certains points de notre continuum (CC'), mais ceci

---

([1]) En prenant $\frac{\partial U}{\partial \alpha}$, on considère, bien entendu, β comme fonction de α, et de même dans le calcul de $\frac{\partial V}{\partial \alpha'}$, on considère β' comme fonction de α'.

n'arrivera qu'en des points *en nombre limité*, couples de points que j'appelle *les points* (AA′) (A étant sur C et A′ sur C′). Prenons

$$\int\int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha}\, d\alpha\, d\alpha'.$$

En intégrant d'abord par rapport à α, en laissant fixe le point (α', β') supposé distinct d'un point A′, nous avons un résultat nul. Donc tous les éléments de l'intégrale sont nuls, sauf les éléments infiniment petits à une dimension correspondant au contour C et au voisinage d'un point A′. La même remarque s'applique à la seconde intégrale

$$\int\int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \alpha'}\, d\alpha\, d\alpha',$$

en intervertissant seulement les accents. Nous voyons donc que l'intégrale

$$\int\int \mathrm{R}(\alpha, \beta)\, \mathrm{S}(\alpha', \beta')\, d\alpha\, d\alpha'$$

serait nulle, en laissant de côté un nombre fini d'éléments infiniment petits dans une dimension. Comme pour ces éléments, la dernière intégrale reste finie, ils n'ont pas d'importance pour la valeur de l'intégrale, et l'on aurait

$$\int_{\mathrm{C}}\int_{\mathrm{C}'} \mathrm{R}(\alpha, \beta)\, \mathrm{S}(\alpha', \beta')\, d\alpha\, d\alpha' = 0,$$

ce qui est absurde, puisque sa valeur est $\omega\omega'$ qui n'est pas nul. Nous donnons donc ainsi un exemple d'*intégrale double de seconde espèce*

$$\int\int \mathrm{T}(x, y, z)\, dx\, dy$$

qui ne se réduit pas à une intégrale

$$\int\int \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right) dx\, dy$$

(U et V étant rationnelles en x, y et z), et qui, en même temps, n'est pas une intégrale double de première espèce de la surface.

IX. — Seconde définition des intégrales de seconde espèce.

27. On peut donner des intégrales de seconde espèce une définition qui fait intervenir la considération des *résidus* de l'intégrale double. Nous nous bornons d'ailleurs à une surface ne présentant que des singularités ordinaires. Soit

$$\iint R(x, y, z)\,dx\,dy \tag{1}$$

une intégrale double attachée à la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

On peut toujours supposer que l'intégrale devienne infinie seulement le long de certaines courbes simples de la surface et pour les points à l'infini. Pour chacune de ces lignes et pour la ligne à l'infini, l'intégrale aura un certain nombre de résidus qui sont des périodes d'intégrales abéliennes. J'en rappelle la définition, telle qu'elle résulte des recherches de M. Poincaré sur les résidus des intégrales doubles. Si C est une ligne le long de laquelle R devienne infinie et représentée par

$$z = S(x, y), \qquad \varphi(x, y) = 0,$$

prenons, y étant regardé comme un paramètre, le résidu de la fonction de x,

$$R(x, y, z).$$

Ce sera une quantité de la forme

$$\chi(x, y), \qquad [\varphi(x, y) = 0],$$

χ étant rationnelle en x et y. Les périodes (polaires ou cycliques) de l'intégrale abélienne

$$2\pi i \int \chi(x, y)\,dy$$

relative à la courbe φ sont les *résidus* de l'intégrale (1) relatifs à la courbe C.

28. Supposons que l'intégrale (1) soit de *seconde* espèce; je dis qu'alors tous les *résidus* relatifs à C sont nuls. Réciproquement, si tous les résidus relatifs à C sont nuls, l'intégrale (1) présente, en un point arbitraire de C, le caractère d'une intégrale de seconde espèce.

La démonstration de ces deux propositions va se faire à la fois. Nous ne diminuons pas la généralité en supposant que la courbe C est une section plane ou une portion d'une section plane de la surface. Nous avons alors, en supposant que le plan de la section soit $x = 0$, l'intégrale double

$$\int\int \frac{S(x, y, z)}{x^{\alpha}} dx\, dy,$$

la fraction rationnelle S ne devenant pas identiquement infinie pour $x = 0$. En employant les réductions dont nous avons fait si souvent usage, on peut supposer que $\alpha = 1$, et l'on a alors l'intégrale

$$(2) \qquad \int\int \frac{S(x, y, z)}{x} dx\, dy.$$

Soit C la courbe (ou une des courbes) suivant laquelle le plan $x = 0$ coupe la surface. Les résidus relatifs à la courbe C seront tous nuls, si toutes les périodes de l'intégrale abélienne

$$\int S(0, y, \zeta)\, dy$$

relative à la courbe C sont nulles. Mais on a alors pour l'intégrale précédente une fraction rationnelle

$$K(y, \zeta)$$

et, par suite, en retranchant de (2) l'intégrale

$$(3) \qquad \int\int \frac{\partial}{\partial y} \frac{K(y, z)}{x} dx\, dy,$$

la différence des intégrales (2) et (3) reste finie en un point *arbitraire* de la courbe C, et, en *tout* point de la courbe C, elle reste finie sur cette courbe dans le voisinage de ce point (le point pouvant être exclu).

Réciproquement, si l'intégrale est une intégrale de seconde espèce, on pourra retrancher de (2) une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{\partial}{\partial y} \frac{T(x, y, z)}{x} dx\, dy,$$

telle que la différence reste finie dans le voisinage de C; on a donc

$$S(0, y, \zeta) = \frac{\partial}{\partial y}[T(0, y, \zeta)]$$

pour la courbe C, et tous les résidus relatifs à C sont nuls.

De là nous concluons que, si pour toutes les courbes C et pour la courbe à l'infini de la surface, tous les résidus sont nuls, l'intégrale est telle que, dans le voisinage de tout point d'une de ces lignes, on peut retrancher une intégrale de la forme voulue, de telle sorte que la différence des deux intégrales reste finie sur la ligne dans le voisinage du point. D'après les résultats de la Section VII, cela suffit à établir que l'intégrale est de seconde espèce. La réciproque est d'ailleurs évidente d'après ce que nous avons vu plus haut.

Ainsi donc nous sommes conduit à une seconde définition des intégrales de seconde espèce *par la considération des résidus de l'intégrale double*.

29. Terminons par une application des considérations qui précèdent aux intégrales de fonctions rationnelles, en recherchant à quelles conditions l'intégrale

$$(4) \qquad \int\int \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} dx\, dy,$$

où P et Q sont des polynomes (dont le second est supposé irréductible), est une intégrale de seconde espèce. D'après ce qui précède, il est nécessaire que l'intégrale abélienne

$$(5) \qquad \int \frac{P(x, y)}{Q'_y(x, y)} dx$$

relative à la courbe $Q(x, y) = 0$, se réduise à une fraction rationnelle

de x et y; c'est la condition pour que les résidus correspondant à la courbe $Q = 0$ soient tous nuls. La condition est suffisante: on va voir, en effet, que, si elle est remplie, on peut retrancher de (4) une intégrale convenable, et la différence mettra en évidence la nature de l'intégrale.

On peut, par hypothèse, mettre l'intégrale abélienne (5) sous la forme

$$\int \frac{P(\xi, \eta)}{Q'_\eta(\xi, \eta)} d\xi = \frac{M(\xi, \eta)}{R(\xi)} \qquad [Q(\xi, \eta) = 0],$$

$M(\xi, \eta)$ et $R(\xi)$ étant des polynomes. Formons l'intégrale

$$(6) \quad \iint \left[\frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M(x, y)}{Q(x, y) R(x)}\right) - \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M(x, y)}{Q(x, y) R(x)}\right)\right] dx\, dy;$$

elle est, comme nous savons, de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

On voit immédiatement que la différence des intégrales (4) et (6) est de la forme

$$\iint \frac{S(x, y)}{V(x)} dx\, dy,$$

S et V étant des polynomes : l'intégrale (4) est donc bien de seconde espèce, puisqu'il en est ainsi de l'intégrale que nous venons de trouver en dernier lieu.

Sur certaines sommes arithmétiques;

Par le P. DE SÉGUIER.

On trouvera dans les pages suivantes :

1° Une étude des sommes

$$\psi_0(k, h) = \sum_s \left(\frac{s}{h}\right) e^{s\frac{2k\pi i}{h}}, \qquad \psi_1(k, h) = \sum_s \left(\frac{h}{s}\right) e^{s\frac{2k\pi i}{h}},$$

où s parcourt un système de restes $(\operatorname{mod} h)$ qui sera précisé ultérieurement, lorsque les arguments sont des entiers quelconques :

2° L'examen de leurs relations avec les sommes

$$(\mathrm{S}) \qquad \sum_s \left(\frac{\mathrm{D}}{s}\right) f(s), \qquad \mathrm{D} \equiv 0, 1 \pmod 4;$$

3° Une application au cas où $f(s) = \log \Gamma\left(\frac{s}{|\mathrm{D}|}\right) (\mathrm{D} < 0)$, la moyenne géométrique de la fonction

$$\eta(\omega) = e^{\frac{\pi i \omega}{n}} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - e^{2n\pi i \omega}),$$

lorsque ω parcourt les racines (à partie imaginaire positive) des formes représentantes des classes d'un genre, ainsi que la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\mathrm{D}}{n}\right) \frac{\log n}{n}$$

étant alors exprimables par (S) :

4° La détermination selon le module D, lorsque $f(s)$ est une puissance de s, des sommes (S) et de la partie de (S) qui se compose de termes positifs.

5° L'extension au cas d'un degré N quelconque de la décomposition (par adjonction d'un radical) de l'équation aux racines primitives de l'unité donnée par Dirichlet pour le cas où N est sans diviseur carré.

6° L'extension au cas d'un discriminant négatif quelconque des expressions elliptiques analogues aux sommes ψ données par Kronecker pour certaines séries de Rosenheim dans le cas d'un discriminant négatif fondamental.

Relativement aux points que je suppose connus ou que j'indique plus sommairement, je demande au lecteur la permission de le renvoyer au Mémoire de Kronecker sur les fonctions elliptiques, et à ma thèse de doctorat.

1. Avec Kronecker, j'appellerai *discriminant* tout nombre congru à 0 ou à 1, selon le module 4, et *discriminant fondamental* tout nombre de l'une des formes P, -4P, ± 8P, P étant congru à 1 selon le module 4 et sans diviseur carré. Tout discriminant D peut, et d'une seule manière, se mettre sous la forme $D = D_0 Q^2$, D_0 étant un discriminant fondamental.

J'appellerai *discriminant simple* un discriminant non carré (ou égal à l'unité) dont la valeur absolue est une puissance d'un nombre premier, et *discriminant essentiel* un produit de discriminants simples. Un discriminant quelconque pourra, et d'une seule manière, se mettre sous la forme $\omega\mathfrak{Q}^2$, ω étant un discriminant essentiel premier à $\mathfrak{Q}$.

J'entendrai toujours par $\sqrt{a}$ la détermination du radical dont l'argument est $> -\frac{\pi}{2}$, mais $\leq \frac{\pi}{2}$, et je poserai, pour abréger, φ étant la fonction d'Euler, $\varphi(\pm n) = \varphi(n)$.

Le sens du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ défini par Legendre pour b premier positif, a quelconque premier à b, se trouve fixé pour b quelconque $\gtrless 0$ par les conventions

$$(1) \qquad \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a_1}{b}\right) = \left(\frac{aa_1}{b}\right), \qquad \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b_1}\right) = \left(\frac{a}{bb_1}\right),$$

de Jacobi, si l'on y ajoute la convention de Dirichlet, que $\left(\frac{a}{b}\right)$ soit nul si a n'est pas premier à b $\left[\text{d'où } \left(\frac{\pm a}{0}\right) = 0 \text{ si } a \neq 1 \text{ et } \left(\frac{\pm 1}{0}\right) = 1\right]$, et la convention

$$\left(\frac{a}{2^\beta b}\right) = \left(\frac{2^\beta}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right) \qquad (b \text{ impair}),$$

de Kronecker.

On ajoute ordinairement, depuis Dirichlet, la convention

$$\left(\frac{m}{-1}\right) = \left(\frac{m}{1}\right),$$

qui continue naturellement le sens donné pour $p > 0$ à $\left(\frac{m}{p}\right)$ par Legendre, ou celui qui résulte de l'égalité de Gauss,

$$\left(\frac{m}{p}\right) = \frac{\varphi(m, p)}{\varphi(1, p)}, \qquad \varphi(m, p) = \sum_{s=1}^{s=p} e^{s^2 \frac{2m\pi i}{p}} \qquad (p \text{ premier}).$$

De cette convention résultent les propriétés suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{A}{b}\right), \\ A \equiv a \pmod{4b} \quad \text{si} \quad b \equiv 2 \pmod 4 \quad \text{et est premier à } a, \\ A \equiv a \pmod b \quad \text{dans tous les autres cas;} \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)(-1)^{\frac{a'-1}{2}\frac{b'-1}{2} + \frac{\operatorname{sgn} a - 1}{2}\frac{\operatorname{sgn} b - 1}{2}}, \\ a = 2^\alpha a', \qquad b = 2^\beta b', \qquad a', b' \text{ impairs;} \end{cases}$$

d'où, en particulier, pour b impair, en posant $B = b + 2\lambda a'$,

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{2^\alpha}{Bb}\right)\left(\frac{a}{B}\right)(-1)^{\lambda\frac{a'-1}{2} + \frac{\operatorname{sgn} a - 1}{2}\frac{\operatorname{sgn} Bb - 1}{2}},$$

et si en outre λ est pair, en observant que $Bb \equiv 2\lambda + 1 \pmod 8$,

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{B}\right)(-1)^{\frac{\alpha\lambda}{2} + \frac{\operatorname{sgn} a - 1}{2}\frac{\operatorname{sgn} Bb - 1}{2}},$$

donc

$$(4)\quad \begin{cases} \left(\frac{D}{b}\right) = \left(\frac{D}{B}\right)(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} D - 1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sgn} B b - 1}{2}}, \qquad B \equiv b \pmod{D}, \\ D \text{ étant un discriminant.} \end{cases}$$

Cette dernière convention n'est d'ailleurs nullement nécessaire. Elle oblige, d'après (3), à écrire,

$$\left(\frac{-1}{b}\right) = (-1)^{\frac{b-1}{2} + \frac{\operatorname{sgn} b - 1}{2}},$$

et, si l'on veut représenter les caractères $\left(\frac{n}{|p|}\right)$, $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ dans la théorie des formes quadratiques de discriminant D (p étant un facteur premier impair de D pris avec un signe tel qu'il soit lui-même un discriminant) par $\left(\frac{p}{n}\right)$, $\left(\frac{-1}{n}\right)$, à supposer n non seulement premier à 2D, mais d'un signe déterminé qui soit le même pour tous les nombres aptes à former le dénominateur symbolique d'un caractère.

Une autre convention se présente encore naturellement : si l'on veut conserver, pour b négatif, la relation

$$\left(\frac{-1}{b}\right) = (-1)^{\frac{b'-1}{2}},$$

avec la formule (3), celle-ci oblige à poser $\left(\frac{a}{-1}\right) = \operatorname{sgn} a$. De là un nouveau sens parfaitement défini pour le symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$. En donnant ce second sens à $\left(\frac{a}{b}\right)$, sa valeur est égale à l'ancienne multipliée par $(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} a - 1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sgn} b - 1}{2}}$. La propriété (2) devient, A et a ayant le même sens que tout à l'heure,

$$(5)\qquad \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{A}{b}\right)(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} b - 1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sgn} A a - 1}{2}}.$$

La propriété (3) reste inaltérée. La propriété (4) devient

$$\begin{cases} \left(\frac{D}{b}\right) = \left(\frac{D}{B}\right), \qquad B \equiv b \pmod{D}, \\ D \text{ étant un discriminant.} \end{cases}$$

La convention relative au signe du dénominateur symbolique des caractères devient inutile.

La formule (3) qui, pour $a = -1$, fixe la valeur de $\left(\frac{-1}{b}\right)$ selon les conventions adoptées, devient illusoire pour $a = 2$. Mais (2) ou (5) donne, si $a \equiv \rho \pmod 8$,

$$\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{\rho}{2}\right);$$

puis, pour $\rho = \pm 3$,

$$\left(\frac{2}{\rho}\right) = \pm\left(\frac{2 \mp \rho}{\rho}\right) = -1,$$

pour $\rho = \pm 1$,

$$\left(\frac{2}{\rho}\right) = +1.$$

Donc

$$\left(\frac{2}{a}\right) = (-1)^{\frac{a'^2-1}{8}}, \qquad a = 2^\alpha a', \qquad a' \text{ impair.}$$

C'est le second sens du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ que M. Weber [1] a introduit d'une manière un peu différente, pour le cas particulier où a est un discriminant, en le désignant par (a, b). Je conserverai la notation $\left(\frac{a}{b}\right)$ et son premier sens, sauf à indiquer d'un mot les simplifications très légères qui résultent du second sens.

2. Dans les sommes

$$\psi_0(h, n) = \sum_s \left(\frac{s}{n}\right) e^{s^2 \frac{2\pi ih}{n}},$$

où s parcourt un système de restes (mod n), ce système est indifférent si $n \not\equiv 2 \pmod 4$. Si $n \equiv 2 \pmod 4$, il doit encore être défini relativement au module $4n$, ou, ce qui revient au même, relativement au module 8, les restes pairs étant d'ailleurs sans influence. Je le définirai par la condition suivante, portant sur les seuls restes impairs :

$$s \equiv \rho \qquad (\text{mod } 8),$$

(1) *Gœttinger Nachrichten*, 1893.

ρ étant l'un des nombres 1, 3, 5, 7, arbitraire d'ailleurs, mais le même pour tous les restes s. Dans ces conditions, ψ_0 est déterminée au facteur $\left(\frac{2}{\rho}\right)$ près.

On voit de suite que $\psi_0(-h, n)$ ou $\psi_0(h, -n)$ est conjuguée de $\psi_0(h, n)$, que $\psi_0(h, n) = \psi_0(h_1, n)$ si $h \equiv h_1 \pmod{n}$, et que, si a est premier à n, $\psi_0(ha^2, n) = \psi_0(h, n)$, cela même si $n \equiv 2 \pmod{4}$, car alors $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

Si m est premier à n, h étant toujours quelconque, on a

$$(1) \qquad \psi_0(hm, n)\psi_0(hn, m) = \psi_0(h, mn),$$

$$(2) \qquad \psi_0(h, m)\psi_0(h, n) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)\psi_0(h, mn).$$

En effet, l'un au moins m des nombres m, n sera impair. On a d'ailleurs

$$\psi_0(hm, n)\psi_0(hn, m) = \sum_{s,t}\left(\frac{s}{n}\right)\left(\frac{t}{m}\right)e^{\frac{2h\pi i}{mn}(sm^2+tn^2)},$$

s, t parcourant des restes convenables selon les modules n, m respectivement. Je supposerai que t parcourt un système de restes pairs; $\left(\frac{s}{n}\right)$, $\left(\frac{t}{m}\right)$ pourront alors être remplacés par $\left(\frac{sm^2+tn^2}{n}\right)$, $\left(\frac{sm^2+tn^2}{m}\right)$ respectivement. En remarquant que $sm^2+tn^2 = \sigma$ parcourt un système de restes $\pmod{mn}$ et que $\sigma \equiv s \pmod{8}$ si $n \equiv 2 \pmod{4}$, l'identité (1) devient évidente. L'identité (2) se démontre d'une manière analogue en remplaçant $\left(\frac{s}{n}\right)$ par $\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{sm+tn}{n}\right)$ et $\left(\frac{t}{m}\right)$ par $\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{sm+tn}{m}\right)$, t étant seulement pris divisible par 4 si

$$n \equiv 2 \pmod{4}.$$

On obtient sans peine les généralisations suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} \psi_0(h, N) = \prod_i \psi_0(hA_i, a_i), \qquad \psi_0(h, N) = \prod_{i,k}\left(\frac{a_i}{a_k}\right)\left(\frac{a_k}{a_i}\right)\psi_0(h, a_i), \\ \qquad \left(N = \prod_i a_i = A_i a_i; \qquad i, k = 0, 1, 2, \ldots; \qquad i \neq k\right) \end{array}\right.$$

les a_i étant premiers entre eux deux à deux, positifs ou négatifs.

La définition adoptée pour $\psi_0(h, 2n')$ (n' impair) coïncide avec celle qui résulterait de (1) ou de (2) pour $m = n'$, $n = 2$, en remplaçant $\psi_0(hn', 2)$ ou $\psi_0(h, 2)$ par $(-1)^h\left(\frac{2}{\rho}\right)$.

En donnant au symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ le second sens, il faudrait supposer que la variable de sommation s reste positive ou que le second argument de ψ_0 est essentiellement positif.

5. Quel que soit le système de restes (mod n) que parcourt s, la somme

$$\psi_1(h, n) = \sum_s \left(\frac{n}{s}\right) e^{s\frac{2h\pi i}{n}}$$

est conjuguée de $\psi_1(-h, n)$ et $\psi_1(h, n) = \psi_1(h_1, n)$ si $h_1 \equiv h \pmod{n}$. Mais c'est seulement si n est un discriminant que la valeur de ψ_1 est indépendante de ce système de restes et encore faut-il que les différentes déterminations d'un même reste s aient un signe fixé si n est négatif. Bornons-nous au cas où n est un discriminant et où les restes s sont tous positifs quand n est négatif. Soit $n = 2^\nu n'$ (n' impair). Si $n' \equiv 1 \pmod{4}$, $\psi_1(h, n) = \psi_0(h, n)$. Si $n' \equiv -1 \pmod{4}$, donc (pour s impair) $\left(\frac{-1}{s}\right) = -ie^{\frac{\pi is}{2}}$, $\psi_1(h, n) = -i\psi_0\left(h + \frac{n}{4}, n\right)$. On voit que, même avec nos hypothèses restrictives, ψ_1 est une forme encore un peu plus générale que ψ.

Si a est premier au discriminant n, on aura

$$\psi_1(ha^2, n) = \psi_1(h, n),$$

et, si m, n sont deux discriminants premiers entre eux,

$$\psi_1(hn, m)\psi_1(hm, n) = \psi_1(h, mn).$$

Pour démontrer la propriété correspondant à l'identité (2), j'observerai que

$$\psi_1(h, n) = \sum_s \left(\frac{n}{s}\right) e^{s\frac{-2h\pi i}{|n|}};$$

cela est évident si n est < 0; si n est > 0, on a

$$\psi_1(h, n) = \sum_s \left(\frac{n}{n-s}\right) e^{(n-s)\frac{2h\pi i}{n}} = \sum_s \left(\frac{n}{s}\right) e^{s\frac{-2h\pi i}{n}}.$$

On pourra alors, en remplaçant $\left(\frac{n}{s}\right)$ par $\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n}{s|m|+t|n|}\right)$, $\left(\frac{m}{t}\right)$ par $\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{s|m|+t|n|}\right)$, procéder comme au numéro précédent. On obtient

$$\psi_1(h, m)\psi_1(h, n) = \psi_1(h, mn)(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} m - 1}{2}\frac{\operatorname{sgn} n - 1}{2}}.$$

La fonction

$$\psi(h, n) = \sum_s \left(\frac{n}{s}\right) e^{s\frac{2h\pi i}{|n|}} = \psi_1(-h, n)$$

qu'on vient de voir s'introduire est un peu plus commode que $\psi_0(h, n)$. C'est elle que je considérerai désormais.

En donnant partout aux symboles $\left(\frac{a}{b}\right)$ leur second sens on n'est plus astreint à fixer le signe de la variable de sommation s.

4. En désignant par ε_x $(-1)^r$ si $|x|$ est le produit de r facteurs premiers différents, 0 si $|x|$ a un diviseur carré > 1, x si $|x| = 0, 1$; par $\sum\limits_d^{N}$ une sommation où d parcourt tous les diviseurs de N y compris 1 et N; par $f(d)$, $g(d)$, $h(d)$ trois fonctions définies au moins quand d est un diviseur de N, la seconde satisfaisant, pour des arguments diviseurs de N, aux conditions

$$g(d)g(d') = g(dd'), \qquad g(1) \neq 0;$$

si l'on suppose vraie une des deux égalités

$$h(d) = \sum_\delta^d f(\delta)g(\delta'), \qquad f(d) = \sum_\delta^d \varepsilon_\delta g(\delta)h(\delta'), \qquad \delta\delta' = d.$$

l'autre le sera également.

Ainsi $\left(\begin{smallmatrix} N^2 \\ n_1, \ldots, n_q \end{smallmatrix}\right)$ représentant 0 ou 1 selon que $N, n_1, \ldots, n_q$ ont ou non un plus grand commun diviseur $\neq 1$, $\sum\limits_n^N$ une sommation où $n_1, \ldots, n_q$ parcourent les nombres 1, 2, ..., N, si l'on pose, F étant une fonction quelconque,

$$g(d) = 1, \qquad f(d) = \sum_n^d \left(\begin{smallmatrix} d^2 \\ n_1, \ldots, n_q \end{smallmatrix}\right) F\left(\frac{N n_1}{d}, \ldots, \frac{N n_q}{d}\right),$$

$$h(d) = \sum_n^d F\left(\frac{N n_1}{d}, \ldots, \frac{N n_q}{d}\right),$$

on aura, en prenant successivement dans la somme $h(d)$ les termes où $n_1, \ldots, n_q$ ont avec d le plus grand commun diviseur $\frac{d}{\delta}$, δ parcourant les diviseurs de d,

$$\sum_n^d F\left(\frac{N n_1}{d}, \ldots, \frac{N n_q}{d}\right) = \sum_\delta^d \sum_n^\delta \left(\begin{smallmatrix} \delta^2 \\ n_1, \ldots, n_q \end{smallmatrix}\right) F\left(\frac{N n_1}{\delta}, \ldots, \frac{N n_q}{\delta}\right),$$

donc aussi

$$\sum_n^d \left(\begin{smallmatrix} d^2 \\ n_1, \ldots, n_q \end{smallmatrix}\right) F\left(\frac{N n_1}{d}, \ldots, \frac{N n_q}{d}\right) = \sum_\delta^d \varepsilon_\delta \sum_n^{\delta'} F\left(\frac{N n_1 \delta}{d}, \ldots, \frac{N n_q \delta}{d}\right),$$
$$\delta\delta' = d.$$

Cette dernière égalité peut d'ailleurs se vérifier directement en observant qu'un système d'arguments $\frac{N}{d}\mu_1, \ldots, \frac{N}{d}\mu_q$, où $\mu_1, \ldots, \mu_q, d$ ont le plus grand commun diviseur θ, figurera dans le second membre de l'égalité précédente autant de fois que θ a de diviseurs parmi les δ et chaque fois avec le coefficient ε_δ. Or, on sait que, si θ est > 1, $\sum\limits_\delta^\theta \varepsilon_\delta = 0$.

Voici deux applications. Pour $F = 1$, $d = N$, on obtient, en appelant $\varphi_q(N)$ le nombre des systèmes $n_1, \ldots, n_q$ de nombres $\leqq N$ tels que le plus grand commun diviseur de $n_1, \ldots, n_q$, N soit l'unité,

$$\varphi_q(N) = \sum_{\delta}^{N} \varepsilon_\delta \delta'^q = N^q \prod_{p}^{N} (1 - p^{-q}), \qquad n^q = \sum_{\delta}^{N} \varphi_q(\delta),$$

p parcourant les facteurs premiers différents de N.

Soient en second lieu $q = 2\rho$, $A(u_1, \ldots, u_\rho)$ une fonction abélienne de genre ρ ne devenant infinie pour aucun des $N^{2\rho}$ systèmes de $N^{\text{èmes}}$ de période et $P_i^1, \ldots, P_i^\rho$ $(i = 1, \ldots, 2\rho)$ un système de périodes dont toute autre période soit, et d'une seule manière, une fonction linéaire homogène à coefficients entiers. Si l'on prend

$$F = \log\left[X - A\left(\frac{m_1 P_1^1 + \ldots + m_{2\rho} P_{2\rho}^1}{N}, \ldots\right)\right]$$

et qu'on écrive $\log\theta_N$ pour $f(N)$, $\log\Phi_N$ pour $h(N)$, les relations précédentes deviennent, en faisant $d = N$,

$$\Phi_N = \prod_{d}^{N} \theta_d, \qquad \theta_N = \prod_{d}^{N} \Phi_{d'}^{\varepsilon_d}, \qquad dd' = N,$$

d parcourant les diviseurs de N, et le degré de θ_N est $\varphi_q(N)$.

Admettons que la fonction A vérifie la condition

$$A(nu_1, \ldots, nu_\rho) = \frac{\lambda_n[A(u_1, \ldots, u_\rho)]}{\mu_n[A(u_1, \ldots, u_\rho)]},$$

λ_n, μ_n étant des polynomes, et que les racines de θ_N soient distinctes. Soit $N = PQ$, P étant le produit des facteurs premiers différents de N. Posons $m_i = \alpha_i + P\beta_i$. On aura les $\varphi_q(N)$ systèmes de m_i en faisant parcourir aux α_i les $\varphi_q(P)$ systèmes analogues relatifs à P, et aux β_i les nombres $0, 1, \ldots, Q-1$. Le polynome de degré N

$$\mu_Q^{\varphi_q P}(x)\,\theta_P \left| \frac{\lambda_Q(x)}{\mu_Q(x)} \right|$$

s'annulera pour les mêmes valeurs que $\theta_N(x)$ et n'en différera que par un facteur constant.

Pour revenir à la somme ψ_0, prenons, en désignant par Q^2 un diviseur carré commun à $N = MQ^2 > 0$ et à $h = kQ^2$ et en faisant $q = 1$,

$$F(m) = \left(\frac{m}{M}\right) e^{m\frac{2h\pi i}{N}}.$$

On aura, pour $M \not\equiv 2 \pmod 4$,

$$\psi_0(h, N) = \sum_{m=1}^{m=N} \left(\frac{N^2}{m}\right)\left(\frac{m}{M}\right) e^{m\frac{2h\pi i}{N}} = \sum_{d}^{N} \varepsilon_d \sum_{n=1}^{n=d'} \left(\frac{nd}{M}\right) e^{nd\frac{2k\pi i}{M}}, \qquad dd' = N.$$

Il suffit de faire parcourir à d les diviseurs de Q^2, le dernier symbole étant nul pour les autres valeurs de d. On aura alors $d = Md''$, $dd'' = Q^2$, et, en introduisant un symbole sans influence,

$$\psi_0(h, N) = \sum_{d}^{Q^2} \varepsilon_d \left(\frac{M^2}{d}\right) \sum_{n=1}^{n=Md''} \left(\frac{nd}{M}\right) e^{nd\frac{2k\pi i}{M}}, \qquad dd'' = Q^2.$$

Pour deux valeurs de n congrues $\pmod M$ le terme général reprend la même valeur et, d ne parcourant effectivement que des nombres premiers à M, nd parcourra avec n un système de restes $\pmod M$. Donc

$$\left\{\begin{array}{l} \psi_0(h, N) = Q^2 \prod_{p}^{Q} \left[1 - \frac{1}{p}\left(\frac{M^2}{p}\right)\right] \psi_0(k, M), \qquad h = kQ^2, \qquad N = MQ^2, \\ \qquad p \text{ parcourant les facteurs premiers différents de } Q. \end{array}\right.$$

Ce résultat subsiste évidemment pour ψ_1 et ψ si M est un discriminant.

Soient $M = 2M'$, $Q = 2^\delta Q'$ (M', Q' impairs). On aura, et même si $\delta = 0$,

$$\psi_0(h, N) = \psi_0(h, M'Q'^2)\,\psi_0(h, 2^{2\delta+1}).$$

Si δ est > 0, le dernier terme se ramène, d'après ce qui précède, à une somme ψ_0 dont le second argument est 8 et le calcul direct montre

qu'elle est nulle; ce dernier terme peut donc s'écrire

$$(1 - \operatorname{sgn} \delta)\, \psi_0(k, 2).$$

En appliquant à $\psi_0(h, M'Q'^2)$ les résultats obtenus, en enlevant au premier argument un facteur carré premier au second et en observant que $\psi_0(2k, M')\psi_0(k, 2)$ ou $\psi_0(2k, M')\psi_0(kM', 2)$ est égal à $\psi_0(k, M)$, on obtient

$$\psi_0(h, N) = (1 - \operatorname{sgn} \delta)\, Q'^2 \prod_p^{Q'} \left[1 - \frac{1}{p}\left(\frac{M'^2}{p}\right)\right] \psi_0(k, M).$$

Ainsi Q^2 étant un diviseur carré commun à $k = hQ^2$ et à $N = MQ^2$, Θ le plus grand commun diviseur de M et de Q, on aura, quel que soit M,

$$\psi_0(k, N) = \operatorname{sgn} |\Theta - 2|\, Q^2 \prod_p^{Q} \left[1 - \frac{1}{p}\left(\frac{M^2}{p}\right)\right] \psi_0(k, M).$$

5. Si le second argument de ψ_0, ψ_1 ou ψ est un carré, on se trouve dans un cas particulier de la somme $\sigma(h, N)$ des puissances $h^{\text{ièmes}}$ des racines primitives de l'équation binome de degré N. Cette somme étant réelle, on a $\sigma(h, n) = \sigma(-h, n)$. Les formules du numéro précédent donnent, en y prenant $F(m) = e^{\frac{2mh\pi i}{N}}$ $(h > 0)$,

$$\sigma(h, N) = \sum_d^{N} \varepsilon_d \sum_{n=1}^{n=d'} e^{\frac{2nh\pi i}{d'}}, \qquad dd' = N.$$

La dernière somme étant nulle si d' ne divise pas h, il suffit de faire parcourir à d' les diviseurs de N qui divisent h ou le plus grand commun diviseur Δ de $h = k\Delta$, $N = M\Delta$. Alors $d = Md''$ et en remettant d pour d'' on pourra écrire

$$\sigma(h, N) = \sum_{d'}^{\Delta} \varepsilon_{Md} d' = \varepsilon_M \sum_d^{\Delta} \varepsilon_d \left(\frac{M^2}{d}\right) d', \qquad dd' = \Delta,$$

où

$$\sigma(h, N) = \varepsilon_M \Delta \prod_p^\Delta \left[1 - \frac{1}{p}\left(\frac{M^2}{p}\right)\right] = \varepsilon_M \frac{\varphi(N)}{\varphi(M)},$$

p parcourant les facteurs premiers différents de N.

6. Je vais maintenant calculer $\psi(h, \delta)$, δ étant un discriminant simple, et pour cela compléter les résultats du nº **4** qui sont ici évidents.

Tout d'abord la formule connue

$$\psi_0(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p},$$

où h et p sont positifs et p premier impair, peut s'écrire

$$(1) \qquad \psi(h, \delta_0) = \left(\frac{\delta_0}{h}\right) \sqrt{\delta_0} (-1)^{\frac{\operatorname{sgn} h - 1}{2} \frac{\operatorname{sgn} \delta_0 - 1}{2}},$$

δ_0 étant un discriminant fondamental premier impair; une vérification directe montre qu'elle subsiste pour $\delta_0 = -4, \pm 8$.

Soit d'abord δ impair, donc $|\delta| = p^\alpha$, p, α étant impairs et, δ_0 étant le discriminant fondamental, $\delta = \delta_0 p^{\alpha-1} = \delta_0 q^2$. Posons

$$s = p^{\alpha-1} s' + s''.$$

On aura

$$(2) \qquad \begin{cases} \psi(h, \delta) = \sum_{s''} \left(\frac{\delta_0}{s''}\right) e^{s'' \frac{2h\pi i}{p^\alpha}} \sum_{s'} e^{s' \frac{2h\pi i}{p}}, \\ s' = 0, 1, \ldots, p-1, \qquad s'' = 0, 1, \ldots, p^{\alpha-1} - 1. \end{cases}$$

Posons $h = h' p^\mu$, h' étant premier à p. Si $\mu = 0$, $\psi = 0$. Si $\mu > 0$, on aura

$$\psi(h, \delta) = p \psi(hp^{-1}, \delta p^{-1}),$$

et, β étant le plus petit des nombres $\alpha - 1$, μ,

$$\psi(h, \delta) = p^\beta \psi(hp^{-\beta}, \delta p^{-\beta}).$$

Si $\beta = \mu$, cela est nul d'après (2). Si $\beta = \alpha - 1$, $\delta p^{-\beta} = \delta_0$. Donc, d'après (1), en convenant que $\left(\frac{\delta}{k}\right)$ est nul si k n'est pas entier, on aura, quel que soit β,

$$(3) \qquad \psi(h, \delta) = \left(\frac{\delta}{k}\right)\sqrt{\delta}(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} h - 1}{2}\frac{\operatorname{sgn}\delta - 1}{2}}, \qquad \delta = \delta_0 q^2, \qquad h = kq^2.$$

Soit $|\delta| = 2^\alpha$, $h = 2^\mu h'$, h' impair. Si α est impair, en posant

$$s = 2^{\alpha-3}s' + s'',$$

on sera ramené au cas $\delta_0 = \pm 8$. Si α est pair, en posant

$$s = 2^{\alpha-2}s' + s'',$$

on sera ramené au cas $\delta_0 = -4$.

Donc la formule (3) subsiste quel que soit le discriminant simple δ.

7. Soient $\delta = \delta_0 q^2$, $\delta' = \delta'_0 q'^2$ deux discriminants simples premiers entre eux, δ_0, δ'_0 étant leurs discriminants fondamentaux. En posant $h = kq^2 = k'q'^2$, $k'' = \frac{h}{q^2 q'^2} = \frac{k}{q'^2} = \frac{k'}{q^2}$ et en observant que k'' sera entier lorsque k et k' le seront, mais seulement alors, on aura

$$\left(\frac{\delta}{k}\right) = \left(\frac{\delta}{k''}\right), \qquad \left(\frac{\delta}{k'}\right) = \left(\frac{\delta}{k''}\right), \qquad \left(\frac{\delta}{k}\right)\left(\frac{\delta'}{k'}\right) = \left(\frac{\delta\delta'}{k''}\right),$$
$$\sqrt{\delta\delta'} = \sqrt{\delta}\sqrt{\delta'}(-1)^{\frac{\operatorname{sgn}\delta - 1}{2}\frac{\operatorname{sgn}\delta' - 1}{2}}.$$

Par suite, la dernière formule du n° **5** donne

$$\psi(h, \delta\delta') = \left(\frac{\delta\delta'}{k''}\right)\sqrt{\delta\delta'}(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} h - 1}{2}\frac{\operatorname{sgn}\delta\delta' - 1}{2}}, \qquad h = k'' q^2 q'^2.$$

Si $D = D_0 Q^2 = \varpi\mathfrak{Q}^2$ est un discriminant quelconque de discriminant fondamental D_0 et de discriminant essentiel ϖ, on aura

$$\psi(h, D) = \psi(h, \varpi)\sigma(h, \mathfrak{Q}^2),$$

et, par conséquent,

$$\left\{\begin{array}{l}\psi(h, \mathrm{D}) = \sum_s \left(\frac{\mathrm{D}}{s}\right) e^{s\frac{2h\pi i}{|\mathrm{D}|}} = \sum_s \left(\frac{\mathrm{D}}{s}\right) e^{s\frac{-2h\pi i}{\mathrm{D}}} \\ \qquad\qquad = \varepsilon_{\mathfrak{Q}'} \frac{\varphi(\mathfrak{Q}^2)}{\varphi(\mathfrak{Q}')} \left(\frac{\mathfrak{D}}{k}\right) \sqrt{\mathfrak{D}} (-1)^{\frac{\operatorname{sgn} h - 1}{2} \frac{\operatorname{sgn} \mathrm{D} - 1}{2}}; \\ s \text{ parcourt un système de restes} > 0; \\ \mathrm{D} = \mathrm{D}_0 \mathrm{Q}^2 = \mathfrak{D}\mathfrak{Q}^2 = \mathrm{D}_0 \mathrm{Q}_0^2 \mathfrak{Q}^2; \qquad h = k\mathrm{Q}_0^2; \\ \left(\frac{\mathfrak{D}}{k}\right) = 0 \text{ si, } \mathfrak{D} \text{ étant} \neq 1,\ k \text{ n'est pas entier}; \qquad \left(\frac{1}{k}\right) = 1; \\ \mathfrak{Q}' \text{ est le quotient de } \mathfrak{Q}^2 \text{ par son plus grand commun diviseur avec } h.\end{array}\right.$$

Il résulte de là que $\psi(0, \mathrm{D})$, et de même $\psi_0(0, \mathrm{N})$, est nul, à moins que D ou $|\mathrm{N}|$ ne soit un carré ou le double d'un carré impair; si $|\mathrm{N}|$ est un carré,

$$\psi_0(0, \mathrm{N}) = \varphi(\mathrm{N});$$

si $\left|\frac{\mathrm{N}}{2}\right|$ est un carré impair,

$$\psi_0(0, \mathrm{N}) = \left(\frac{2}{\rho}\right) \varphi(\mathrm{N}),$$

ρ étant toujours le reste commun selon le module 8 des valeurs impaires de la variable de sommation.

En donnant au symbole $\left(\frac{\mathrm{D}}{s}\right)$ son second sens, on voit que

$$\sum_s \left(\frac{\mathrm{D}}{s}\right) e^{-s\frac{2h\pi i}{\mathrm{D}}} = \varepsilon_{\mathfrak{Q}'} \frac{\varphi(\mathfrak{Q}^2)}{\varphi(\mathfrak{Q}')} \left(\frac{\mathfrak{D}}{k}\right) \sqrt{\mathfrak{D}}, \qquad h = k\mathrm{Q}_0^2.$$

s parcourant un système de restes quelconque (les conventions relatives au cas où k n'est pas entier restant naturellement les mêmes).

8. Soit $f(s)$ une fonction développable en série de Fourier sous la forme

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathrm{A}(n) e^{\frac{2ni\pi s}{|\mathrm{D}|}} \qquad \text{pour} \qquad 0 < s < |\mathrm{D}|.$$

On aura, d'après ce qui précède, en posant

$$\sum_{s=1}^{s=D}\left(\frac{D}{s}\right)f(s)=A(0)\psi(0,D)+S,$$

$$\left\{\begin{array}{l} S=\varphi(\mathfrak{Q})\sqrt{D}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\varepsilon_{\mathfrak{Q}'_n}}{\varphi(\mathfrak{Q}'_n)}B(n)\left(\frac{\mathfrak{D}}{k}\right);\\ B(n)=A(n)+A(-n)\operatorname{sgn}D;\\ D=\mathfrak{D}\mathfrak{Q}^2=D_0Q^2=D_0Q_0^2\mathfrak{Q}^2;\qquad k=\frac{n}{Q_0^2};\\ \mathfrak{Q}'_n \text{ est le quotient de } \mathfrak{Q}^2 \text{ par son plus grand commun diviseur avec } n. \end{array}\right.$$

$\mathfrak{D}$ est toujours le discriminant essentiel et D_0 le discriminant fondamental de D. Si D est un carré, $\mathfrak{D}=Q_0=1$.

Il suffit de considérer les termes de la série où k est entier. En prenant successivement les valeurs de $k=md'$ qui ont avec $\mathfrak{Q}^2=dd'$ le plus grand commun diviseur d' et en observant que

$$\left(\frac{\mathfrak{D}}{dd'}\right)=1,\qquad \text{donc}\qquad \left(\frac{\mathfrak{D}}{d}\right)=\left(\frac{\mathfrak{D}}{d'}\right),$$

on peut écrire

$$S=\varphi(\mathfrak{Q})\sqrt{D}\sum_{d}^{\mathfrak{Q}^2}\frac{\varepsilon_d}{\varphi(d)}\left(\frac{\mathfrak{D}}{d}\right)\sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{\mathfrak{D}d^2}{m}\right)B\left(\frac{mQ^2}{d}\right).$$

Or soit dans les formules du n° 4

$$g(d)=1,\qquad f(d)=\left(\frac{\mathfrak{D}}{d}\right)\sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{\mathfrak{D}d^2}{m}\right)B\left(\frac{mQ^2}{d}\right);$$

$$h(d)=\left(\frac{\mathfrak{D}}{d}\right)\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{\mathfrak{D}}{n}\right)B\left(\frac{nQ^2}{d}\right).$$

En prenant successivement les valeurs de n qui ont avec d le plus grand commun diviseur $\frac{d}{\delta}$, δ parcourant les diviseurs de d, on voit que

$h(d) = \sum_{\delta}^{d} f(\delta)$. Donc aussi

$$f(d) = \sum_{\delta}^{d} \varepsilon_\delta h\left(\frac{d}{\delta}\right) = \left(\frac{\mathfrak{D}}{d}\right) \sum_{\delta}^{d} \varepsilon_\delta \left(\frac{\mathfrak{D}}{\delta}\right) \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\mathfrak{D}}{n}\right) \mathrm{B}\left(\frac{n\delta Q^2}{d}\right),$$

formule qui devient d'ailleurs évidente si l'on observe qu'un nombre quelconque m ayant avec d le plus grand commun diviseur θ, figure au second membre, sous la forme $n\delta$, comme argument de la fonction $\left(\frac{\mathfrak{D}}{m}\right)\mathrm{B}\left(\frac{mQ^2}{d}\right)$ de m autant de fois que θ a de diviseurs parmi les δ et chaque fois avec le coefficient ε_δ; or $\sum_{\delta}^{\theta} \varepsilon_\delta = 0$ si $\theta > 1$.

Si la fonction B jouit de la propriété $\mathrm{B}(x)\,\mathrm{B}(y) = \mathrm{B}(xy)$, on aura, en outre,

$$f(d) = \left(\frac{\mathfrak{D}}{d}\right) \frac{\mathrm{B}(Q^2)}{\mathrm{B}(d)} \prod_{p}^{d} \left[1 - \left(\frac{\mathfrak{D}}{p}\right)\mathrm{B}(p)\right] \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\mathfrak{D}}{n}\right) \mathrm{B}(n),$$

p parcourant les facteurs premiers différents de d.

Donc

$$\mathrm{S} = \mathrm{B}(Q^2)\,\varphi(\mathfrak{Q})\sqrt{\mathrm{D}} \sum_{d}^{\mathfrak{Q}^2} \varepsilon_d\, g(d) \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\mathfrak{D}}{n}\right) \mathrm{B}(n),$$

$$g(d) = \frac{1}{\mathrm{B}(d)\,\varphi(d)} \left(\frac{\mathfrak{D}}{d}\right) \prod_{p}^{d} \left[1 - \left(\frac{\mathfrak{D}}{p}\right)\mathrm{B}(p)\right];$$

d ne parcourt, en réalité, que les diviseurs du produit P des facteurs premiers différents de $\mathfrak{Q}$. Or, pour deux diviseurs d, d' de P premiers entre eux, on a

$$g(d)\, g(d') = g(dd').$$

Donc

$$\sum_{d}^{\mathfrak{Q}^2} \varepsilon_d\, g(d) = \prod_{p}^{\mathrm{P}} [1 - g(p)] = \frac{\mathrm{P}}{\varphi(\mathrm{P})} \prod_{p}^{\mathrm{P}} \left[1 - \frac{1}{p\,\mathrm{B}(p)} \left(\frac{\mathfrak{D}}{p}\right)\right].$$

et, puisque $\varphi(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{Q}\frac{\varphi(P)}{P}$,

$$S = \mathfrak{Q}\sqrt{D}\,B(Q^2)\prod_p^{\mathfrak{Q}}\left[1 - \left(\frac{\mathfrak{D}}{p}\right)\frac{1}{p\,B(p)}\right]\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{\mathfrak{D}}{n}\right)B(n).$$

Si $B(n) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\alpha}\lambda_\nu B_\nu(n)$, λ_ν ne dépendant pas de n, on peut appliquer à chaque série S_ν, où B est remplacé par B_ν, la transformation précédente.

9. Prenons, par exemple, en observant la relation

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{z^n}{n} = \int_0^z\frac{dz}{1-z} = -\log(1-z), \qquad 0 \leqq |z| \leqq 1, \qquad z \neq 1,$$

et sa conséquence

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{z^n}{n^\nu} = \left(\int_0^z\frac{dz}{z}\right)^{\nu-1}\int_0^z\frac{dz}{1-z} = l_\nu(z), \qquad 0 \leqq |z| \leqq 1, \qquad z \neq 1$$

(où l'exposant $\nu - 1$ est symbolique et la dernière égalité une définition),

$$f(s) = l_\nu e^{\frac{2i\pi s}{|D|}}.$$

On aura $A(n) = 0$ pour $n \leqq 0$, $B(n) = n^{-\nu}$, donc

$$(1) \qquad \sum_{s=1}^{s=|D|}\left(\frac{D}{s}\right)l_\nu e^{\frac{2i\pi s}{|D|}} = \frac{\mathfrak{Q}\sqrt{D}}{Q^{2\nu}}\prod_p^{\mathfrak{Q}}\left[1 - \left(\frac{\mathfrak{D}}{p}\right)p^{\nu-1}\right]H_\nu(\mathfrak{D}),$$

en posant

$$H_\nu(D) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^\nu} = \prod_p^{\mathfrak{Q}}\left[1 - \left(\frac{\mathfrak{D}}{p}\right)\frac{1}{p^\nu}\right]H_\nu(\mathfrak{D}).$$

J'écrirai parfois $H(D)$ pour $H_1(D)$.

Prenons ensuite $f(s) = s^\alpha$ et posons $\sum_{s=1}^{s=|D|}\left(\frac{D}{s}\right)s^\alpha = \varpi(\alpha, D)$.

Il convient de définir $\varpi(\alpha, N)$ quand $N = 2N'$ (N' impair) par

$$(2) \qquad \varpi(\alpha, N) = \left(\frac{2}{\rho}\right)\varpi(\alpha, N'),$$

ρ ayant le même sens que dans le cas analogue pour ψ.

Les sommes $\sum_{s=1}^{s=|N|}\left(\frac{s}{N}\right)s^\alpha$ où N n'est pas impairement pair se ramènent à $\varpi(\alpha, D)$. Celles où N est impairement pair s'y ramènent aussi pourvu que l'on fasse la même convention que dans (2). Je me bornerai donc aux sommes $\varpi(\alpha, D)$.

On a ici

$$A(n) = \frac{1}{|D|}\int_0^{|D|} x^\alpha e^{-\frac{2ni\pi x}{|D|}}\,dx,$$

c'est-à-dire

$$A(n) = \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{\nu=\alpha} \dfrac{-|D|^\alpha \alpha!}{(\alpha-\nu+1)!(2ni\pi)^\nu} & \text{si} \quad n \neq 0, \\[2ex] \dfrac{|D|^\alpha}{\alpha+1} & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

Donc

$$\sqrt{D}\,B(n) = 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\alpha} \frac{-|D|^\alpha \alpha!}{(\alpha-\nu+1)!(2\pi n)^\nu}\,\mathcal{R}\frac{\sqrt{D}}{i^\nu} = \sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\nu=\alpha}\lambda_\nu B_\nu.$$

$$B_\nu = \frac{1}{n^\nu}, \qquad \lambda_\nu = \frac{2}{\sqrt{D}}\,\frac{-|D|^\alpha \alpha!}{(\alpha-\nu+1)!(2\pi)^\nu}\,\mathcal{R}\frac{\sqrt{D}}{i^\nu},$$

$\mathcal{R}$ désignant une partie réelle, et

$$(3) \quad \begin{cases} \varpi(\alpha, D) = \dfrac{|D|^\alpha}{\alpha+1}\varpi(0, D) \\[2ex] \qquad + 2\sum_{1}^{\nu=\alpha} \dfrac{-|D|^\alpha \alpha!}{(\alpha-\nu+1)!(2\pi)^\nu}\,\mathcal{R}\dfrac{\mathfrak{Q}\sqrt{D}}{i^\nu \mathfrak{Q}^{2\nu}} \prod_p^{\mathfrak{Q}}\left[1 - \left(\dfrac{\mathfrak{D}}{p}\right)p^{\nu-1}\right] H_\nu(\mathfrak{D}). \end{cases}$$

Cette formule fournit l'expression des $H_\nu(\mathfrak{D}) = H_\nu(D_0)$ et, par conséquent, des $H_\nu(D)$ par les ϖ de proche en proche pour les ν de même parité; si D est < 0, ce sera pour les ν impairs; si D est > 0, ce sera pour les ν pairs.

En substituant aux $H_\nu(D_0)$ leurs expressions par les $\varpi(\alpha, D_0)$, on obtient une relation entre $\varpi(\alpha, D)$ et les sommes $\varpi(\nu, D_0)$ où ν est $\leq \alpha$. Ainsi, pour $\alpha = 1$ et $D < 0$, on aura

$$\varpi(1, D) = Q \mathfrak{Q} \prod_p^{\mathfrak{Q}} \left[1 - \left(\frac{D_0}{p}\right)\right] \varpi(1, D_0).$$

Par exemple $\varpi(1, -28) = 0$.

Au lieu de la formule (1) qui permet de remplacer H_ν par l_ν, on obtient (H. Weber, *loc. cit.*), en sommant séparément dans H_ν les termes où n donne le même reste (mod D) et en observant la relation

$$\frac{d}{da} \log \Gamma(a) = \Gamma'(1) + \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n}\right)$$

et ses dérivées successives [pour $\nu = 1$, il faut encore que $\varpi(0, D) = 0$],

$$H_\nu(D) = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1}^{s=|D|} \left(\frac{D}{s}\right) \frac{d^\nu}{ds^\nu} \log \Gamma\left(\frac{s}{|D|}\right).$$

On peut comparer ces expressions et leurs transformées par la relation entre $\Gamma(a)$ et $\Gamma(1-a)$ avec celles déduites de (3) pour les valeurs de ν d'une parité convenable. Pour les valeurs de ν qui échappent à (3) on ne peut plus comparer qu'avec (1) (où l'une des parties du premier membre est toujours nulle). Ainsi, quand D est > 0, on a par (1) :

$$\frac{2\sqrt{D}}{Q^2} H(D) = -\sum_{s=1}^{s=D} \left(\frac{D}{s}\right) \log \sin \frac{\pi s}{D} = 2 \sum_{s=1}^{s=D} \left(\frac{D}{s}\right) \log \Gamma\left(\frac{s}{D}\right) \quad (D > 0).$$

D'après l'expression connue de $H(D)$ par le nombre des classes, cette relation s'ajoute, pour les nombres ayant la forme de discriminant, à celles employées par Stern (*Journal de Crelle*, t. 67) entre les fonctions Γ dont les arguments sont des fractions de même dénominateur. Elle donne aussi pour la dernière somme une limite *inférieure positive*.

Si D est < 0, les choses se présentent assez différemment, comme on va le voir.

10. Prenons

$$f(s) = 2\log\Gamma\left(\frac{s}{|D|}\right) + 2\left(\frac{s}{|D|} - 1\right)\log\pi$$
$$- \left(\frac{2s}{|D|} - 1\right)\Gamma'(1) + \log\sin\frac{\pi s}{|D|}.$$

Cette expression est la somme de la série de Kummer et l'on a

$$f(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\log 2n}{n}\sin\frac{2n\pi s}{|D|} \qquad (0 < s < |D|),$$

ou, en introduisant une série doublement infinie qui converge d'après un théorème de Dirichlet,

$$f(s) = \frac{1}{2i}\sum \frac{\log|2n|}{n} e^{\frac{2ni\pi s}{|D|}} \qquad (0 < s < |D|),$$
$$n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty.$$

Ici $A(0)$ est nul. Si $D > 0$, $B(n) = 0$. Si $D < 0$,

$$\sqrt{D}\,B(n) = 2A(n)\sqrt{D} = \frac{\log 2n}{n}\sqrt{-D}.$$

Pour $D < 0$ on a d'ailleurs, d'après la définition de S et la fin du numéro précédent,

$$S = 2\sum_{s=1}^{s=-D}\left(\frac{D}{s}\right)\left[\log\Gamma\left(\frac{s}{-D}\right) + \frac{\Gamma'(1) - \log\pi}{D}s\right].$$

Posons

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{\mathfrak{D}}{n}\right)\frac{\log n}{n} = \overline{H}(\mathfrak{D}).$$

On aura

$$S = \varphi(\mathfrak{Q})\sqrt{-D}\sum_{d}^{\mathfrak{Q}}\frac{\varepsilon_d}{\varphi(d)}\left(\frac{\mathfrak{D}}{d}\right)\sum_{\delta}^{d}\varepsilon_\delta\left(\frac{\mathfrak{D}}{\delta}\right)\frac{d}{\delta Q^2}\left[\overline{H}(\mathfrak{D}) + H(\mathfrak{D})\log\frac{2\delta Q^2}{d}\right].$$

En transformant la première partie du second membre comme au

n° **8**, on obtient

$$Q^2 S = \mathfrak{Q}\sqrt{-D}\prod_p^{\mathfrak{Q}}\left[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)\right]\left[\overline{H}(\omega)+H(\omega)\log 2Q^2\right]$$
$$-\varphi(\omega)H(\omega)\sqrt{-D}\sum_d^{\mathfrak{Q}}\frac{\varepsilon_d}{\varphi(d)}\left(\frac{\omega}{d}\right)\sum_\delta^d \varepsilon_\delta\left(\frac{\omega}{\delta}\right)\frac{d}{\delta}\log\frac{d}{\delta}.$$

Le coefficient de $H(\omega)\sqrt{-D}$ dans le dernier terme est de la forme $\sum_p^{\mathfrak{Q}} C_p \log p$, p parcourant les facteurs premiers différents de $\mathfrak{Q}$, dont je désignerai encore le produit par P. Calculons C_p. C_p est une somme dont les éléments ne proviennent que des termes où $d = p\Delta$, Δ parcourant les diviseurs de $\frac{P}{p}$, et où δ parcourt les diviseurs de Δ, donc que des termes

$$-\varphi(\mathfrak{Q})\sum_\Delta^{\frac{P}{p}}\frac{\varepsilon_{p\Delta}}{\varphi(p\Delta)}\left(\frac{\omega}{p\Delta}\right)\sum_\delta^\Delta \varepsilon_\delta\left(\frac{\omega}{\delta}\right)\frac{p\Delta}{\delta}\log\frac{p\Delta}{\delta}.$$

Donc

$$C_p = p\frac{\varphi(\mathfrak{Q})}{p-1}\left(\frac{\omega}{p}\right)\sum_\Delta^{\frac{P}{p}}\frac{\Delta\varepsilon_\Delta}{\varphi(\Delta)}\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)\sum_\delta^\Delta\varepsilon_\delta\left(\frac{\omega}{\delta}\right)\frac{1}{\delta} = p\frac{\varphi(\mathfrak{Q})}{p-1}\left(\frac{\omega}{p}\right)\sum_\Delta^{\frac{P}{p}}\varepsilon_\Delta g(\Delta),$$

$$g(\Delta) = \frac{\Delta}{\varphi(\Delta)}\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)\prod_q^\Delta\left[1-\left(\frac{\omega}{q}\right)\frac{1}{q}\right],$$

q parcourant les facteurs premiers distincts de Δ. Donc

$$C_p = p\frac{\varphi(\mathfrak{Q})}{p-1}\left(\frac{\omega}{p}\right)\prod_q^{\frac{P}{p}}[1-g(q)],$$

q parcourant les facteurs premiers distincts de $\frac{P}{p}$. Donc

$$C_p = \frac{-\mathfrak{Q}}{1-\left(\frac{\omega}{p}\right)}\prod_q^{P}\left[1-\left(\frac{\omega}{q}\right)\right],$$

q parcourant les facteurs premiers distincts de P.

Donc

$$(4)\quad \begin{cases} Q^2 S = 2\sqrt{-D}\prod_p^{\mathfrak{Q}}\left[1-\left(\frac{\mathfrak{D}}{p}\right)\right] \\ \qquad\times\left[\overline{H}(\mathfrak{D}) + H(\mathfrak{D})\log 2Q^2 - H(\mathfrak{D})\sum_p^{\mathfrak{Q}}\frac{\log p}{1-\left(\frac{\mathfrak{D}}{p}\right)}\right]. \end{cases}$$

En particulier

$$Q_0^2 S(\mathfrak{D}) = \sqrt{-\mathfrak{D}}\left[\overline{H}(\mathfrak{D}) + H(\mathfrak{D})\log 2Q_0^2\right].$$

Or on a

$$\overline{H}(D) = -\left[\frac{\partial H_{1+\rho}(D)}{\partial\rho}\right]_{\rho=0} = -\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\prod_p^{\mathfrak{Q}}\left[1-\left(\frac{\mathfrak{D}}{p}\right)\frac{1}{p^{1+\rho}}\right]H_{1+\rho}(\mathfrak{D})\right\}_{\rho=0}$$

$$= \prod_p^{\mathfrak{Q}}\left[1-\left(\frac{\mathfrak{D}}{p}\right)\frac{1}{p}\right]\left[\overline{H}(\mathfrak{D}) - H(\mathfrak{D})\sum_p^{\mathfrak{Q}}\left(\frac{\mathfrak{D}}{p}\right)\frac{\log p}{p-\left(\frac{\mathfrak{D}}{p}\right)}\right].$$

Ces formules fournissent la somme de la série $\overline{H}(D)$ pour $D < 0$. En désignant par $K(D)$ le nombre des classes primitives de discriminant D, par $\tau(D)$ un nombre égal à 2 si $D < -4$, à 4 si $D = -4$, à 6 si $D = -3$, et en se rappelant que l'on a, pour $D_0 < 0$,

$$K(D_0) = \frac{\tau(D_0)}{2D_0}\varpi(1, D_0),$$

on pourra écrire

$$\overline{H}(D_0)\sqrt{-D_0} = [\Gamma'(1) - \log\pi]\frac{4K(D_0)}{\tau(D_0)} + 2\sum_{s=1}^{s=-D}\left(\frac{D_0}{s}\right)\log\Gamma\left(\frac{s}{-D_0}\right).$$

Inversement, la formule (4), quand le coefficient de $\overline{H}$ y est nul, détermine complètement S et vient s'ajouter à celles de Stern. Dans le cas contraire, elle fournit une limite *supérieure* de S, car on a [cela

résulte de la formule (5), p. 85]

$$\overline{\mathrm{H}}(\mathrm{D}_0)\sqrt{-\mathrm{D}_0} < \frac{2\pi \mathrm{K}(\mathrm{D}_0)}{\tau(\mathrm{D}_0)}(\log\sqrt{-\mathrm{D}_0} - 0.912685).$$

11. Considérons maintenant les séries suivantes où F est une fonction quelconque assurant seulement la convergence

$$h(\Delta) = \sum_{m,n} \mathrm{F}\left(a\frac{\mathrm{Q}^2 m^2}{\Delta^2} + b\frac{\mathrm{Q}mn}{\Delta} + cn^2\right),$$

$$f(\Delta) = \sum_{m,n} \left(\frac{\Delta^2}{m}\right) \mathrm{F}\left(a\frac{\mathrm{Q}^2 m^2}{\Delta^2} + b\frac{\mathrm{Q}mn}{\Delta} + cn^2\right);$$

$b^2 - 4ac = \mathrm{D} = \mathrm{D}_0\mathrm{Q}^2 = \mathfrak{D}\mathfrak{Q}^2$, D_0 étant le discriminant fondamental et $\mathfrak{D}$ le discriminant essentiel de D;

a est positif, premier à 2D, $b = b_0\mathrm{Q}$, $c = c_0\mathrm{Q}^2$; b_0, c_0, $\frac{\mathrm{Q}}{\Delta}$ sont entiers;

Si $\mathrm{D} < 0$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$ sauf $m = n = 0$;

Si $\mathrm{D} > 0$, m, n parcourent toutes les valeurs entières vérifiant les conditions $n > 0$, $2a\frac{\mathrm{Q}m}{\Delta n} + b \geq \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{U}}$, T, U étant les plus petites solutions positives de $\mathrm{T}^2 - \mathrm{DU}^2 = 4$.

Le signe $\sum\limits_{m,n}$ aura le même sens dans tout ce qui va suivre; on voit que, si D est positif, ce sens dépend de Δ.

En prenant successivement les valeurs de m qui ont avec Δ le plus grand commun diviseur $\frac{\Delta}{d}$, d parcourant les diviseurs de Q, on a évidemment

$$h(\Delta) = \sum_{d}^{\Delta} f(d),$$

et par suite

$$f(\Delta) = \sum_{d}^{\Delta} \varepsilon_d h\left(\frac{\Delta}{d}\right).$$

12. Soit D_1 un discriminant diviseur de $\mathrm{D} = \mathrm{D}_1\mathrm{D}_2$ tel que D_2 soit

aussi un discriminant, Λ un nombre premier à $2D$ représentable par la forme $(a, b, c) = r$ et positif à moins que r ne soit négative (la convention relative au signe de Λ serait, je le rappelle, inutile, en prenant le symbole généralisé de Legendre dans le second sens indiqué au début). $\left(\frac{D_1}{\Lambda}\right)$ a une valeur indépendante du choix de Λ : c'est un caractère de la classe de r que je désignerai parfois par $\left(\frac{D_1}{r}\right)$ ou par $\left(\frac{D_1}{s}\right)$, s étant un système quelconque de formes ou de classes pour lesquelles il garde la même valeur.

Soit λ le nombre des discriminants simples fondamentaux δ tels que $\frac{D}{\delta}$ soit un discriminant. $\lambda - 1$ seulement des *caractères fondamentaux* $\left(\frac{\delta}{-}\right)$ (le dénominateur symbolique non écrit étant considéré comme *arbitraire*, toujours, bien entendu, premier à $2D$, positif, représentable par une forme de discriminant D et le même pour tous les caractères) seront indépendants, car $\left(\frac{D_0}{-}\right) = \left(\frac{D}{-}\right) = 1$. Je supprimerai donc par la pensée un des caractères fondamentaux *appartenant à* D_0, choisi d'ailleurs arbitrairement, et nommerai *indépendants* les $\lambda - 1$ caractères fondamentaux restants. Tout caractère $\left(\frac{D_1}{-}\right)$ étant exprimable sous la forme d'un produit de caractères indépendants, il n'y a proprement à considérer comme déterminations de D_1 que les $2^{\lambda-1} - 1$ termes du produit $\prod_{\delta}(1 + \delta)$ étendu aux numérateurs symboliques des caractères indépendants. Mais comme il est avantageux d'y adjoindre l'unité, je considérerai D_1 comme susceptible de $2^{\lambda-1}$ déterminations qui sont les termes du produit précédent.

Les $K(D)$ classes primitives de discriminant D forment un groupe abélien $\mathfrak{K}_D = \mathfrak{K}$ ayant un diviseur $\mathfrak{L}_D = \mathfrak{L}$ formé des classes où tous les caractères sont égaux à $+1$, et donnant lieu à une décomposition en complexes de la forme

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{L}K_1 + \mathfrak{L}K_2 + \ldots + \mathfrak{L}K_{G(D)} \qquad (K_1 = 1),$$

$$\mathfrak{L}K_\alpha = \mathfrak{L}K_\alpha^{-1},$$

chacun des $\lambda - 1$ caractères indépendants conservant la même valeur dans toutes les classes d'un même complexe et deux complexes $\mathfrak{P}K_\alpha$, $\mathfrak{P}K_\beta$ différant par la valeur d'un caractère au moins, sans quoi on aurait $\mathfrak{P}K_\alpha \mathfrak{P}K_\beta = \mathfrak{P}$, d'où $\mathfrak{P}K_\alpha = \mathfrak{P}K_\beta$. Ces $G(D)$ complexes sont les genres et $\mathfrak{P}$ le genre principal.

Tout caractère $\left(\frac{D_1}{-}\right)$ où $D_1 \neq 1$ prend dans les classes de $\mathfrak{K}$ autant de fois la valeur $+1$ que la valeur -1. Cela résulte de la formule (3) de la page 84 pour $F(x) = \rho x^{-1-\rho}$ et ρ infiniment petit. Les classes où un caractère indépendant déterminé a la valeur $+1$ forment un groupe $\mathfrak{P}_{\lambda-1} = \mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(1)}$ d'indice 2 dans $\mathfrak{K}$, et il y a $\lambda - 1$ groupes analogues $\mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, \lambda - 1$) répondant chacun à un caractère indépendant; deux quelconques de ces groupes sont distincts, sans quoi le produit des deux caractères correspondants, égaux entre eux dans toutes les classes de $\mathfrak{K}$, serait un caractère égal à $+1$ dans toutes les classes de $\mathfrak{K}$. Formons le plus grand commun diviseur $\mathfrak{P}_{\lambda-2}$ de $\mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(1)}$ et de $\mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(2)}$, puis celui $\mathfrak{P}_{\lambda-3}$ de $\mathfrak{P}_{\lambda-2}$ et de $\mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(3)}$, $\ldots$, enfin celui $\mathfrak{P}_1$ de $\mathfrak{P}_2$ et de $\mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(\lambda-1)}$ qui est précisément $\mathfrak{P}$ et aussi le plus grand commun diviseur des $\mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(i)}$. On aura ainsi une suite de compositions de $\mathfrak{K}$

$$\mathfrak{K}, \quad \mathfrak{P}_{\lambda-1}, \quad \mathfrak{P}_{\lambda-2}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}, \quad \ldots,$$

où l'indice de chaque $\mathfrak{P}_i$ dans le groupe précédent est égal à 2. Donc $G(D) = 2^{\lambda-1}$. De plus, si l'on a la décomposition

$$\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}K'_1 + \ldots + \mathfrak{P}K'_{2^i},$$

(les K' étant convenablement choisis et $K'_1 = 1$), on peut supposer que $K_j = K'_j$.

Voici une autre démonstration dont le principe servira tout à l'heure. Soit $F(C)$ une quantité ayant une valeur déterminée pour chaque classe C, et

$$\sum_{C}^{D} \left(\frac{D_1}{C}\right) F(C) = \Phi(D_1, D),$$

la sommation s'étendant à toutes les classes de $\mathfrak{K}_D$. Multiplions

par $\left(\frac{D_1}{c}\right)$, c étant une classe déterminée et sommons pour les $2^{\lambda-1}$ valeurs de D_1. Le coefficient de $F(C)$ sera $\prod_\delta \left[1+\left(\frac{\delta}{C}\right)\left(\frac{\delta}{c}\right)\right]$ expression nulle si un seul des $\left(\frac{\delta}{C}\right)$ est $\neq \left(\frac{\delta}{c}\right)$, égale à $2^{\lambda-1}$ dans le cas contraire. Donc, G étant le système des classes C où les caractères ont tous les mêmes valeurs que dans c, on aura

$$2^{\lambda-1}\sum_C^G F(C) = \sum_{D_1}\left(\frac{D_1}{G}\right)\Phi(D_1, D),$$

la sommation s'étendant à toutes les classes de G. Or, si

$$F(C) = \left(\frac{D_{10}}{C}\right)$$

D_{10} étant une des valeurs de D_1, on a

$$\Phi(D_1, D) = \begin{cases} 0 & \text{pour } D_1 \neq D_{10}, \\ K(D) & \text{pour } D_1 = D_{10}. \end{cases}$$

Donc, t étant le nombre des classes de G,

$$2^{\lambda-1}t = K(D),$$

c'est-à-dire que t est le même pour tous les systèmes G (dont deux quelconques diffèrent par la valeur d'un caractère au moins). Donc les systèmes G sont les complexes $\mathfrak{C}K_i$ ou les genres.

Soit $\mathfrak{R}_{D,d} = \mathfrak{R}_d = \mathfrak{R}$ le groupe des classes primitives de discriminant $D = D'd^2$ (D' étant un discriminant) qui, composées avec une classe quelconque de diviseur d et de discriminant D, reproduisent cette classe. Tout caractère appartenant à D et à D' a la valeur $+1$ dans toutes les classes de $\mathfrak{R}_{D,d}$ et tout caractère appartenant à D, mais n'appartenant plus à D', prend dans les classes de $\mathfrak{R}_{D,d}$ autant de fois la valeur $+1$ que la valeur -1 (la restriction exprimée dans ma thèse relativement aux discriminants positifs divisibles par 16, quand d est pair n'est pas fondée, comme on peut le voir par la démonstration elle-même où l'on doit supposer que le signe des dénominateurs symboliques est déterminé).

Les caractères fondamentaux perdus sont nécessairement indépendants puisque le caractère fondamental supprimé appartient à D_0. On s'assure d'ailleurs facilement que jamais un caractère perdu ne peut être remplacé pour D' par un autre qui n'appartiendrait pas à D.

Supposons que les caractères perdus soient ceux qui correspondent à $\mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(\mu-1)}$. On voit comme précédemment que, si $\mathfrak{V}$ est le plus grand commun diviseur de $\mathfrak{K}_{D,d}$ et de $\mathfrak{P}$ et $K'_1 = 1, \ldots, K'_{2^{\mu-1}}$ un système de classes convenablement choisies dont deux quelconques diffèrent par la valeur d'un au moins des caractères de D qui sont perdus pour D',

$$\mathfrak{K}_{D,d} = \mathfrak{V} K'_1 + \ldots + \mathfrak{V} K'_{2^{\mu-1}}.$$

On peut supposer que K'_j appartient au complexe $\mathfrak{P} K_j$ et par suite que $K_j = K'_j$, $\frac{\mathfrak{K}_{D,d}}{\mathfrak{V}}$ et $\frac{\mathfrak{P}_\mu}{\mathfrak{P}}$ sont holoédriquement isomorphes.

L'ordre de $\mathfrak{K}_{D,d}$ est

$$\Omega_{D,d} = \frac{K(D)}{K(D')} = d \prod_p^d \left[1 - \left(\frac{D'}{p}\right)\frac{1}{p}\right] \frac{\log E(D')}{\log E(D)},$$

$$D' = \frac{D}{d^2}, \qquad E(D) = \frac{T + U\sqrt{D}}{2},$$

T, U étant les plus petites solutions positives de $T^2 - DU^2 = 4$ en sorte que, si $D < 0$, $E(D) = e^{\frac{2i\pi}{\tau(D)}}$; $\tau(D) = 2$ si $D < -4$; $\tau(D) = 4$ si $D = -4$; $\tau(D) = 6$ si $D = -3$; p parcourt les facteurs premiers différents de d.

15. Tout cela rappelé multiplions les dernières équations du n° **11** par $\left(\frac{D_1}{a}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{D_1}{a}\right) + \left(\frac{D_2}{a}\right)\right]$, prenons $\Delta = Q$ et soumettons les deux membres à la sommation $\sum\limits_{a,b,c}^{D} = \sum\limits_{a,b,c,} = \sum\limits_{r}$ qui indique que

$$(a, b, c) = r$$

parcourt un système de représentants des classes de $\mathfrak{K}_D$, chaque représentant étant toujours choisi de manière que a soit positif premier à $2D$, $b = b_0 Q$, $c = c_0 Q^2$. Dans ces conditions la forme $\left(ad, b, \frac{c}{d}\right)$

d'ordre d, composée des deux formes (a, b, c) et $\left(d, \lambda d, \frac{\lambda^2 d^2 - D}{4d}\right) = \rho$ où $\lambda \equiv \frac{D}{d^2} \pmod 2$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$ $\left[b \equiv \lambda d \pmod{2d}\right.$ puisque $\frac{b}{d}$ est de la parité de $\left.\frac{D}{d^2}\right]$, parcourt $\frac{K(D)}{K\left(\frac{D}{d^2}\right)}$ fois un système de représentants de l'ordre d pour le discriminant D, et par suite $\left(a, \frac{b}{d}, \frac{c}{d^2}\right)$ autant de fois un système de représentants de l'ordre primitif pour le discriminant $\frac{D}{d^2}$. On aura donc, les sommes relatives aux classes pour lesquelles $\left(\frac{D_1}{}\right)$ n'est plus un caractère disparaissant en vertu du théorème sur le groupe $\mathfrak{R}_{D,d}$,

$$\frac{1}{K(D)} \sum_{a,b,c}^{D_0 Q^2} \left(\frac{D_1}{a}\right) h(Q) = \sum_{d}^{Q} \sum_{a,\, b_0 d,\, c_0 d^2}^{D_0 d^2} \left(\frac{D_1}{a}\right) \frac{f(d)}{K(D_0 d^2)},$$

$$\frac{1}{K(D)} \sum_{a,b,c}^{D_0 Q^2} \left(\frac{D_1}{a}\right) f(Q) = \sum_{d}^{Q} \varepsilon_{d'} \sum_{a,\, b_0 d,\, c_0 d^2}^{D_0 d^2} \left(\frac{D_1}{a}\right) \frac{h(d)}{K(D_0 d^2)};$$

ou, en posant

$$S_{D_1}(d) = \sum_{a,\, b_0 d,\, c_0 d^2}^{D_0 d^2} \left(\frac{D_1}{a}\right) \sum_{m,n} \left(\frac{d^2}{m}\right) F(am^2 + b_0 dmn + c_0 d^2 n^2),$$

$$\Sigma_{D_1}(d) = \sum_{a,\, b_0 d,\, c_0 d^2}^{D_0 d^2} \left(\frac{D_1}{a}\right) \sum_{m,n} F(am^2 + b_0 dmn + c_0 d^2 n^2)$$

si $\left(\frac{D_0}{}\right)$ appartient à $D_0 d^2$,

$$S_{D_1}(d) = 0, \qquad \Sigma_{D_1}(d) = 0$$

si $\left(\frac{D_1}{}\right)$ n'appartient plus à $D_0 d^2$, et en admettant que F jouit de la propriété $F(xy) = F(x)F(y)$,

$$(1) \qquad \frac{\Sigma_{D_1}(Q)}{K(D_0 Q^2)} = \sum_{d}^{Q} F(d'^2) \frac{S_{D_1}(d)}{K(D_0 d^2)}, \qquad dd' = Q,$$

et

$$(2)\qquad \frac{S_{D_1}(Q)}{K(D_0Q^2)} = \sum_d^Q \varepsilon_{d'} F(d'^2) \frac{\Sigma_{D_1}(d)}{K(D_0 d^2)}.$$

Il importe d'observer que $S_{D_1}(d)$ et $\Sigma_{D_1}(d)$ ne dépendant *en aucune façon* du représentant choisi dans chaque classe de discriminant $D_0 d^2$, pourvu que l'on y remplace $\left(\frac{D_1}{a}\right)$ par la valeur de $\left(\frac{D_1}{\ }\right)$ dans la classe de ce représentant si $\left(\frac{D_1}{\ }\right)$ est un caractère de $D_0 d^2$.

Multiplions les deux membres de (1) ou de (2) par $\left(\frac{D_1}{G}\right)$, G étant un genre de $\mathfrak{K}_D$, et sommons par rapport aux $2^{\lambda-1}$ valeurs de D_1. On aura dans le premier membre la valeur moyenne de $h(Q)$ ou celle de $f(Q)$ *dans les classes du genre* G. Cette valeur sera par conséquent connue si les seconds membres le sont.

Je rappellerai maintenant les deux formules suivantes de Kronecker :

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{a,b,c}\left[\left(\frac{D_1}{A}\right)+\left(\frac{D_2}{A}\right)\right]\sum_{m,n} F(am^2+bmn+cn^2) \\ \qquad = \tau(D)\sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{D_1Q^2}{m}\right)\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{D_2Q^2}{n}\right)F(mn), \\ \text{F, fonction quelconque assurant la convergence,} \\ \tau(D)=1 \text{ si } D>0,\quad 2 \text{ si } D<-4,\quad 4 \text{ si } D=-4,\quad 6 \text{ si } D=-3; \\ D_1 \text{ et } D_2 \text{ sont deux discriminants liés par } D_1D_2=D; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \lim_{\rho=0}\left[\frac{-1}{\rho\sqrt{-D}}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}\right] \\ \qquad = \frac{-1}{\sqrt{-D}}\left[\Gamma'(1)+\log(-D)+\log\frac{\eta^2(\omega_1)\,\eta^2(\omega_2)}{a}\right], \\ D<0,\qquad \eta(\omega)=e^{\frac{i\pi\omega}{12}}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-e^{2ni\pi\omega}), \\ \omega_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\qquad \omega_2=\frac{b+\sqrt{D}}{2a}; \\ \text{les logarithmes sont réels.} \end{cases}$$

On voit sur la seconde formule que le dernier logarithme ne dépend pas précisément de la forme (a, b, c) mais seulement de sa classe et que l'on peut y échanger a et c et remplacer b par $-b$.

Je ne considérerai désormais que des formes positives.

Prenons $F(x) = x^{-1-\rho}$, multiplions (4) par $\left(\frac{D_1}{r}\right)$ et sommons pour tout un système de représentants $r = (a, b, c)$. On aura, en désignant par $O(D_1, d)$ une quantité égale à 1 si $\left(\frac{D_1}{\cdot}\right)$ appartient à $D_0 d^2$, nulle dans le cas contraire, et en posant (*voir*, pour le cas où $D_1 = 1$, Kronecker, *Sitzungsberichte*, p. 211-220, 256-274; 1889)

$$Z(D_0, Q) = \sum_p^Q \left[1 - \left(\frac{D_0}{p}\right)\right] \frac{p^r - 1}{p^r - p^{r-1}} \frac{\log p}{p - \left(\frac{D_0}{p}\right)}, \qquad Z(D_0, 1) = 0$$

(p parcourant les facteurs premiers différents de Q et p^r étant la plus haute puissance de p qui entre dans Q),

$$X(D_1, D) = \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{-D}}{2\pi} \displaystyle\sum_d^Q \frac{\tau(D_0 d^2) O(D_1, d)}{d'^2 K(D_0 d^2)} H(D_1 d^2) H(D_2 d^2), \\ \quad \text{si } D_1 \neq 1, \\ \dfrac{\overline{H}(D_0)}{H(D_0)} - \Gamma'(1) - \log(-D) + Z(D_0, Q), \\ \quad \text{si } D_1 = 1, \end{cases}$$

$$(5) \qquad \frac{1}{K(D)} \sum_{a, b, c}^{D} \left(\frac{D_1}{r}\right) \log \frac{\eta^2(\omega_1)\eta^2(\omega_2)}{a} = X(D_1, D) \text{ [1]}.$$

Les logarithmes sont réels, la forme choisie pour représenter chaque

---

[1] L'analogie de $X(1, D)$ et des autres $X(D_1, D)$ apparait en observant que, si D_2 par exemple est un discriminant fondamental positif,

$$H(D_2)\sqrt{D_2} = 2 \sum_{S=1}^{s=D_2} \left(\frac{D_2}{s}\right) \log \Gamma\left(\frac{s}{D_2}\right).$$

classe est arbitraire; on peut remplacer b par $-b$ et l'on peut échanger a et c, c'est-à-dire que l'on peut remplacer chaque forme par une forme équivalente, par une forme opposée ou par une forme associée.

En multipliant par $\left(\frac{D_1}{G}\right)$, G étant un genre quelconque, en sommant pour les $2^{\lambda-1}$ valeurs de D_1 et en désignant par $\mathcal{M}_G$ une moyenne arithmétique dans les classes du genre G, on aura donc

$$(6) \qquad \mathcal{M}_G \log \frac{\eta^2(\omega_1)\eta^2(\omega_2)}{a} = \sum_{D_1}^{D} \left(\frac{D_1}{G}\right) X(D_1, D)$$

(dans une sommation relative à D_1 l'indice supérieur du signe sommatoire indiquera le discriminant que l'on considère).

Soit d'abord $Q > 1$ et $q \geqq 2$ un diviseur premier ou non de Q.

On peut toujours choisir le représentant $r = (a, b, c)$ tel que a soit premier à q, $b \equiv 0 \pmod{q}$, $c \equiv 0 \pmod{q^2}$. Considérons la forme de diviseur q,

$$\rho = \left(q, \lambda q, \frac{\lambda^2 q^2 - D}{4q}\right), \qquad \lambda \equiv \frac{D}{q^2} \pmod{2}, \qquad 0 \leqq \lambda \leqq 1.$$

On aura $b \equiv \lambda q \pmod{2q}$ et, par suite,

$$r\rho = \left(aq, b, \frac{c}{q}\right) = q\left(a, \frac{b}{q}, \frac{c}{q^2}\right) = q r'.$$

les quantités correspondantes à ω_1, ω_2 pour r' étant $\omega'_1 = \frac{\omega_1}{q}$, $\omega'_2 = \frac{\omega_2}{q}$ $\left(\text{elles seraient } q\omega_1, q\omega_2 \text{ si l'on avait pris } \omega_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{c}, \omega_2 = \frac{b+\sqrt{D}}{c}\right)$.

Quand r parcourt les classes d'un des complexes $\mathfrak{K}_{D,q} C_i$ de la décomposition

$$\mathcal{H}_D = \mathfrak{K}_{D,q} C_1 + \mathfrak{K}_{D,q} C_2 + \ldots + \mathfrak{K}_{D,q} C_{h(Dq^{-2})} \qquad (C_1 = 1),$$

un caractère $\left(\frac{D_1}{}\right)$ appartenant à $\frac{D}{q^2}$ garde une même valeur $\left(\frac{D_1}{r}\right)$, et sa valeur dans la classe de r' sera $\left(\frac{D_1}{r'}\right) = \left(\frac{D_1}{r}\right)$; un caractère $\left(\frac{D_1}{}\right)$

perdu pour $\frac{D}{q^2}$ prend, au contraire, autant de fois la valeur $+1$ que la valeur -1.

Écrivons maintenant l'égalité (5) pour le discriminant $\frac{D}{q^2}$ et pour un caractère $\left(\frac{D_1}{}\right)$ appartenant à $\frac{D}{q^2}$, en prenant pour système de formes représentantes $\frac{\rho}{q} R_\alpha C_i \left[i = 1, 2, \ldots, K\left(\frac{D}{q^2}\right), R_\alpha \text{ représentant une classe déterminée de } \mathcal{R}_{D,q} \right]$. Quand on fait varier α, on obtient $\Omega_{D,q}$ formules qui ne diffèrent que par l'écriture. Ajoutons-les; il viendra

$$\frac{1}{K\left(\frac{D}{q^2}\right)} \sum_{a,b,c}^{D} \left(\frac{D_1}{r}\right) \log \frac{\tau_1^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\tau_1^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{a} = \Omega_{D,q}\, X\left(D_1, \frac{D}{q^2}\right).$$

Si dans le premier membre $\left(\frac{D_1}{}\right)$ était remplacé par un caractère perdu pour $\frac{D}{q^2}$, le résultat serait nul d'après ce qui précède. On peut donc écrire, quel que soit D_1,

$$(7) \qquad \frac{1}{K(D)} \sum_{a,b,c}^{D} \left(\frac{D_1}{r}\right) \log \frac{\tau_1^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\tau_1^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{a} = O\left(D_1, \frac{Q}{q}\right) X\left(D_1, \frac{D}{q^2}\right).$$

On en déduit, comme on a déduit (6) de (5),

$$(8) \qquad \mathcal{A}_G \log \frac{\tau_1^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\tau_1^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{a} = \sum_{D_1}^{Dq^{-2}} \left(\frac{D_1}{G}\right) X\left(D_1, \frac{D}{q^2}\right).$$

En soustrayant (6) de (8), on obtient $\mathcal{A}_G \log \frac{\tau_1^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\tau_1^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\tau_1^2(\omega_1)\,\tau_1^2(\omega_2)}$ exprimé par des logarithmes d'unités fondamentales $E(D_1)$, $E(D_2)$, les logarithmes de transcendantes eulériennes ayant disparu.

Soit maintenant $Q \geq 1$ et q un diviseur premier ou non de D, que je supposerai sans diviseur carré et premier à Q.

On pourra, dans chaque classe, prendre $r=(a, b, c)$ telle que a soit premier à q et $b\equiv c\equiv 0 \pmod q$. Alors $\frac{b}{q}\equiv D \pmod 2$ si q est impair et $\frac{b}{q}\equiv \frac{D}{4} \pmod 2$ si q est pair. La forme

$$\rho=\left(q, \lambda q, \frac{\lambda^2 q^2-D}{4q}\right), \quad \lambda\equiv\begin{cases} D \pmod 2 \text{ si } q \text{ est impair,} \\ \frac{D}{4} \pmod 2 \text{ si } q \text{ est pair,}\end{cases} \qquad (0\leqq\lambda\leqq 1)$$

est ici primitive et $r'=r\rho=\left(aq, b, \frac{c}{q}\right)$, dont les racines sont encore $\omega'_1=\frac{\omega_1}{q}$, $-\omega'_2=\frac{-\omega_2}{q}$, parcourt en même temps que r un système de représentants de l'ordre primitif. On aura donc

$$(9) \qquad \frac{1}{K(D)}\sum_{a,b,c}^{D}\left(\frac{D_1}{r}\right)\log\frac{\eta^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{aq}=\left(\frac{D_1}{\rho}\right)X(D_1, D),$$

$$(10) \qquad \mathcal{A}_G \log\frac{\eta^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{aq}=\sum_{D_1}^{D}\left(\frac{D_1}{G}\right)\left(\frac{D_1}{\rho}\right)X(D_1, D),$$

ces formules se réduisant respectivement à (5) et à (6) si $q=1$, puisque ρ est alors la forme principale.

14. L'expression $\sum_{a,b,c}^{G}\log\frac{\eta^2(\omega_1)\,\eta^2(\omega_2)}{a}=Y$ peut se simplifier comme il suit, en précisant le représentant à choisir dans les classes ambiguës. Appelons simplement *racine* de (a, b, c) la quantité $\omega_1=\omega$; ω_2 sera la racine de la forme opposée $(a, -b, c)$, laquelle appartient au même genre.

Si (a, b, c) est ambiguë, elle peut être supposée de l'un des deux types

$$(11) \qquad (a, 0, c)\backsim(a, 2ah, c+ah^2)\backsim(c, 0, a),$$

$$(12) \qquad \begin{cases}(a, c, c)\backsim(a, 4a-c, 4a-c)\backsim(c, \pm c, a) \\ \qquad \backsim[c, c(2h+1), a+ch+ch^2].\end{cases}$$

Dans le premier cas, en prenant $r=(a, o, c)$, on aura

$$\omega_2=\omega_1.$$

Dans le second cas, en prenant $r=(c, \pm c, a)$, on aura

$$\omega_2=\omega_1 \pm 1 \qquad \text{et} \qquad \eta(\omega_2)=e^{\frac{\pm\pi i}{12}}\eta(\omega_1);$$

en prenant $r=(c, \pm 3c, a+2c)$, on aura

$$\omega_2=\omega_1 \pm 3, \qquad \eta(\omega_2)=e^{\frac{\pm\pi i}{4}}\eta(\omega_1).$$

Donc, en appelant toujours a le premier coefficient,

$$(13) \qquad \mathrm{Y}=\frac{2}{\mu}\sum_{a,b,c}^{6}\log\frac{\eta^{2\mu}(\omega)}{a^{\frac{\mu}{2}}},$$

μ étant un entier convenable qu'on peut toujours supposer égal à 8.

Si q est une puissance d'un nombre premier, la même simplification s'étend à l'expression $\sum\limits_{a,b,c}^{6}\log\dfrac{\eta^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\eta^2(\omega_1)\,\eta^2(\omega_2)}=\mathrm{Z}$. En effet, on peut toujours, en échangeant a et c dans le cas (11), où $\mathrm{D}=-4ac$, c et $4a-c$ dans le cas (12), où $\mathrm{D}=c(c-4a)$, supposer que a est premier à q, et, dans le cas (12), que $c\equiv o \pmod q$; dans le cas (11), on aura encore $c\equiv o \pmod q$, sauf si $\mathrm{D}\equiv 4 \pmod{16}$ [il n'y a point alors de forme du type (12)] avec $\mathrm{Q}\equiv 2 \pmod 4$ et $q=2$.

Cela étant, la forme (a, o, c) ou la forme $(a+2c, \pm 3c, c)$ remplira les conditions imposées aux représentants de classe dans (7) et dans (9) et pourra être prise pour représenter sa classe, sauf si $\mathrm{D}\equiv 4 \pmod{16}$ avec $\mathrm{Q}\equiv 2 \pmod 4$ et $q=2$; mais, dans ce cas particulier, les coefficients extrêmes de (a, o, c) satisfont à la relation $ac\equiv -1 \pmod 4$ et l'on prendra $r=(a, 6a, c+9a)$.

Dans ces conditions, si $r=(a, o, c)$, on aura

$$\omega_1=\omega_2;$$

si $r = (a, 6a, c + 9a)$, $q = 2$, on a

$$\omega_2 = \omega_1 + 6, \qquad \eta\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \eta\left(\frac{\omega_1}{2}\right) e^{\frac{\pi i}{4}}.$$

Si $r = (a + 2c, \pm 3c, c)$, on a

$$r\rho = \left((a + 2c)q, \pm 3c, \frac{c}{q}\right).$$

Considérons la quantité

$$\xi = \log \frac{\eta^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right) \eta^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{(a + 2c)q} = \log \frac{\eta^2\left(\frac{-q}{\omega_1}\right) \eta^2\left(\frac{-q}{\omega_2}\right)}{\frac{c}{q}}.$$

$\frac{-q}{\omega}$ est racine de $\left(\frac{c}{q}, \mp 3c, (a + 2c)q\right)$ et, par suite,

$$\frac{-q}{\omega_2} = \frac{-q}{\omega_1} \mp 3q, \qquad \eta\left(\frac{-q}{\omega_2}\right) = e^{\frac{\mp \pi i q}{4}} \eta\left(\frac{-q}{\omega_1}\right), \qquad \xi = \frac{2}{\mu} \log \frac{\eta^{2\mu}\left(\frac{-q}{\omega}\right)}{\left(\frac{c}{q}\right)^{\frac{\mu}{2}}},$$

μ étant un entier convenablement choisi qu'on peut toujours supposer égal à 8.

On a de même

$$\log \frac{\eta^2(\omega_1) \eta^2(\omega_2)}{a + 2c} = \frac{2}{\mu} \log \frac{\eta^{2\mu}\left(\frac{-1}{\omega}\right)}{c^{\frac{\mu}{2}}},$$

et la formule de transformation $\eta\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \eta(\omega)\sqrt{-i\omega}$ appliquée de nouveau donne enfin

$$\log \frac{\eta^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right) \eta^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\eta^2(\omega_1) \eta^2(\omega_2)} = \frac{2}{\mu} \log \frac{\eta^{2\mu}\left(\frac{\omega}{q}\right)}{\eta^{2\mu}(\omega)}.$$

Donc

$$Z = \frac{2}{\mu} \sum_r^{\mathrm{D}} \log \frac{\eta^{2\mu}\left(\frac{\omega}{q}\right)}{\eta^{2\mu}(\omega)}.$$

13. Je voudrais maintenant revenir sur le cas où $f(s) = s^\alpha$ (nº **9**) pour déterminer $\varpi(\alpha, D)$ selon le module D. Dans les sommes

$$S(\alpha, \pm n) = S(\alpha, n) = \sum_{s=0}^{s=n-1} s^\alpha, \qquad S(o, n) = n,$$

$$s(\alpha, \pm n) = s(\alpha, n) = \sum_{s=0}^{s=|n|} \left(\frac{n^2}{s}\right) s^\alpha,$$

que j'aurai d'abord à considérer, je supposerai le second argument positif.

Il convient de remarquer de suite que S et s sont toujours paires quand le second argument est un discriminant et de même $\varpi(\alpha, D)$ si $\varphi(D)$ est divisible par 4.

Pour abréger, je désignerai le plus grand commun diviseur (pris avec un signe indéterminé) d'une fonction numérique $F(\alpha, N)$ avec M par $F^M(\alpha, N)$ et, si $M = N$, j'écrirai simplement $F'(\alpha, N)$.

Relativement aux sommes $S(\alpha, n)$, un premier procédé de réduction portant sur α est fourni par les formules connues

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2S(1, n) + S(o, n) = (n+1)^2 - 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (\alpha+1) S(\alpha, n) + \frac{(\alpha+1)\alpha}{1.2} S(\alpha-1, n) + \dots \\ \qquad + (\alpha+1) S(1, n) + S(o, n) = (n+1)^{\alpha+1} - 1. \end{array} \right.$$

En désignant par m, n deux entiers positifs premiers entre eux, on aura évidemment

$$S(\alpha, mn) \equiv \sum_{s,t} (sm + tn)^\alpha \qquad (\text{mod } mn),$$

s et t parcourant deux systèmes de restes selon les modules n et m respectivement, d'où

$$S(\alpha, mn) \equiv m^\alpha S(\alpha, n) + n^\alpha S(\alpha, m) \qquad (\text{mod } mn),$$
$$S'(\alpha, mn) = S'(\alpha, m) S'(\alpha, n).$$

Par suite, m_1, m_2, ... étant premiers entre eux deux à deux et M

étant leur produit, on aura

$$(2)\quad \begin{cases} S(\alpha, M) \equiv \sum_i \left(\frac{M}{m_i}\right)^\alpha S(\alpha, m_i) & (\operatorname{mod} M), \\ \qquad \equiv \left(\frac{M}{m_i}\right)^\alpha S(\alpha, m_i) & (\operatorname{mod} m_i), \end{cases}$$

$$S'(\alpha, M) = \prod_i S'(\alpha, m_i).$$

Ainsi on est ramené au cas où le premier argument est une puissance d'un nombre premier. Si p est premier et $\alpha = p^\lambda - p^{\lambda-1} + \beta$, $S(\alpha, p^\lambda)$ est congrue (mod p^λ) à $s(\beta, p^\lambda)$, toutes les valeurs de la variable de sommation s qui sont $\equiv 0 \pmod p$ donnant alors $s^\alpha \equiv 0 \pmod{p^\lambda}$ puisque $p^\lambda - p^{\lambda-1}$ est toujours $\geqq \lambda$, et les autres $s^\alpha \equiv s^\beta \pmod{p^\lambda}$, d'après le théorème de Fermat.

Soient maintenant a, b deux nombres quelconques. On aura

$$S(\alpha, ab) = \sum_{s,t} (s + at)^\alpha, \qquad s = 0, 1, \ldots, a - 1, \qquad t = 0, 1, \ldots, b - 1,$$

et, en développant,

$$(3)\quad \begin{cases} S(\alpha, ab) = S(0, b)\, S(\alpha, a) + \alpha a\, S(1, b)\, S(\alpha - 1, a) \\ \qquad + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1.2} a^2 S(2, b)\, S(\alpha - 2, a) + \ldots \\ \qquad + a^\alpha S(\alpha, b)\, S(0, a). \end{cases}$$

En faisant $a = p^{\lambda-1}$, $b = p$, p étant premier $\geqq 2$ et $\lambda \geqq 2$, donc $2\lambda - 2 \geqq \lambda$, on aura

$$(4)\quad S(\alpha, p^\lambda) \equiv p\, S(\alpha, p^{\lambda-1}) + \alpha p^{\lambda-1} S(1, p)\, S(\alpha - 1, p^{\lambda-1}) \quad (\operatorname{mod} p^\lambda).$$

Or $S(1, p) = \frac{p(p-1)}{2}$. Donc, si $p \neq 2$, $S(1, p) \equiv 0 \pmod p$ et

$$S(\alpha, p^\lambda) \equiv p\, S(\alpha, p^{\lambda-1}) \qquad (\operatorname{mod} p^\lambda);$$

par suite

$$S(\alpha, p^\lambda) \equiv p^{\lambda-1} S(\alpha, p) \qquad (\operatorname{mod} p^\lambda),$$

Les formules (1) donnent d'ailleurs de proche en proche

$$(\alpha+1)!\,S(\alpha, n) \equiv 0 \qquad (\text{mod } n).$$

Donc, si $n = p$ et $\alpha < p$,

$$S(\alpha, p) \equiv 0 \ (\text{mod } p), \qquad \text{si} \qquad \alpha < p-1,$$
$$S(\alpha, p) \equiv -1 \ (\text{mod } p), \qquad \text{si} \qquad \alpha = p-1,$$

Or, dans ces dernières formules, α peut évidemment être remplacé par un nombre qui lui soit congru (mod $p-1$). Donc

$$S(\alpha, p^\lambda) \equiv \begin{cases} 0 \quad (\text{mod } p^\lambda) & \text{si} \quad \alpha \not\equiv 0 \ (\text{mod } p-1), \\ -p^{\lambda-1} \ (\text{mod } p^\lambda) & \text{si} \quad \alpha \equiv 0 \ (\text{mod } p-1). \end{cases}$$

Supposons maintenant $p = 2$. Alors $S(1.2) = 1$, et pour que le second terme au second membre de (4) contienne le facteur 2^λ, il faut supposer que $2^{\lambda-1}$ est un discriminant, donc $\lambda \geqq 3$. En revanche, si l'on observe que

$$S(\alpha.8) \equiv \begin{cases} -2^2 \ (\text{mod } 16) & \text{pour} \quad \alpha = 1, 2, \\ 2^2 \ (\text{mod } 16) & \text{pour} \quad \alpha \text{ pair} \geqq 4, \\ 0 \ \ (\text{mod } 16) & \text{pour} \quad \alpha \text{ impair} > 1, \end{cases}$$

on obtient, en supposant $\lambda \geqq 4$, la formule suivante plus précise, qui se trouve vraie encore pour $\lambda = 2$,

$$S(\alpha, 2^\lambda) \equiv \begin{cases} -2^{\lambda-1} \ (\text{mod } 2^{\lambda+1}) & \text{pour} \quad \alpha = 1, 2 \\ 2^{\lambda-1} \ (\text{mod } 2^{\lambda+1}) & \text{pour} \quad \alpha \text{ pair} \geqq 4 \\ 0 \quad (\text{mod } 2^{\lambda+1}) & \text{pour} \quad \alpha \text{ impair} \geqq 3 \end{cases} \qquad (\lambda \geqq 2).$$

En désignant donc d'une manière générale par x^σ la première puissance d'un nombre x qui soit la valeur absolue d'un discriminant, on aura en toute hypothèse

$$\begin{cases} S(\alpha, p^\lambda) \equiv 0 \quad (\text{mod } p^\lambda) & \text{si} \quad \alpha \not\equiv 0 \ [\text{mod } \varphi(p^\sigma)] \text{ et } \neq \varphi(p), \\ S(\alpha, p^\lambda) \equiv -p^{\lambda-1} \ (\text{mod } p^\lambda) & \text{si} \quad \alpha \equiv 0 \ [\text{mod } \varphi(p^\sigma)] \text{ ou } = \varphi(p). \\ \qquad (p \text{ premier} \geqq 2\,;\ \pm p^\sigma \text{ est un discriminant fondamental}). \end{cases}$$

Donc, $N = \prod_i p_i^{\lambda_i}$ étant la décomposition de N en facteurs premiers et $\mathfrak{P}$ le produit de ceux p_j des facteurs premiers p_i pour lesquels $\alpha \equiv 0 \bmod \varphi(p_j^\sigma)$ ou $= \varphi(p_j)$ et $\mathfrak{P}_1 = \prod_j p_j^{\lambda_j}$, on aura, d'après (2),

$$S(\alpha, N) \equiv -N \sum_j \left(\frac{N}{p_j^{\lambda_j}}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{p_j} (\bmod N) = \frac{gN}{\mathfrak{P}} + kN,$$
$$S'(\alpha, N) = \frac{N}{\mathfrak{P}},$$

$g = -\sum_j \frac{\mathfrak{P}}{p_j}\left(\frac{N}{p_j^{\lambda_j}}\right)^{\alpha-1}$ étant premier à $\mathfrak{P}$ et divisible par $\left(\frac{N}{\mathfrak{P}_1}\right)^{\alpha-1}$ ($g = 1$ si $\alpha = 1$).

Soit q un diviseur commun à N et à α; on aura

$$(s + \lambda N)^\alpha \equiv s^\alpha \qquad (\bmod N_q).$$

Donc $S(\alpha, N)$ apparaît comme ayant une valeur déterminée (mod N_q) indépendamment du système des restes parcourus par s. Donc k sera déterminé (mod q) et, si l'on pose $S(\alpha, N) = \frac{g'N}{\mathfrak{P}}$, les différentes valeurs de g' seront de la forme $g' = g + k\Omega$.

16. Dans $s(\alpha, N)$ comme dans $\varpi(\alpha, N)$, la variable de sommation ne parcourant que des valeurs premières à N, il suffira, si $N = \prod_i p_i^{\lambda_i}$ est la décomposition de N en facteurs premiers et M le plus petit multiple commun des nombres $\varphi(p_i^{\lambda_i})$, de considérer les valeurs de α qui sont $<$ M. Comme d'ailleurs $s(0, N) = \varphi(N)$, je supposerai $\alpha \geqq 1$.

On a, m et n étant premiers entre eux et s, t parcourant des systèmes complets de restes selon les modules m, n respectivement,

$$s(\alpha, mn) \equiv \sum_{s,t}\left(\frac{m^2n^2}{sm+tn}\right)(sm+tn)^\alpha \qquad (\bmod mn),$$
$$\equiv \sum_t\left(\frac{m^2}{t}\right)m^\alpha s(\alpha, n) + \sum_s\left(\frac{n^2}{s}\right)n^\alpha s(\alpha, m) \qquad (\bmod mn),$$
$$\equiv m^\alpha\varphi(m)s(\alpha, n) + n^\alpha\varphi(n)s(\alpha, m) \qquad (\bmod mn).$$

Donc, $a_1, a_2, \ldots$ étant des entiers premiers entre eux deux à deux et A leur produit,

$$s(\alpha, \mathrm{A}) = \sum_i \left(\frac{\mathrm{A}}{a_i}\right)^\alpha \varphi\left(\frac{\mathrm{A}}{a_i}\right) s(\alpha, a_i) \qquad (\bmod \mathrm{A}).$$

En prenant $a_i = p_i^{\lambda_i}$ on est ramené au cas où le second argument est une puissance d'un nombre premier et l'on peut supposer dans chacune des $s(\alpha, a_i)$ α réduit à son plus petit reste $[\bmod \varphi(a_i)]$. Soient a, b deux nombres positifs tels que a contienne tous les facteurs premiers différents de b. On aura comme précédemment

$$(1) \quad \begin{cases} s(\alpha, ab) = \mathrm{S}(0, b)\, s(\alpha, a) \\ \qquad + \alpha a\, \mathrm{S}(1, b)\, s(\alpha - 1, a) + \ldots + a^\alpha\, \mathrm{S}(\alpha, b)\, s(0, a), \end{cases}$$

et l'on est encore ramené au cas où le second argument est un nombre premier où, par conséquent, $s = \mathrm{S}$.

En faisant dans (1) $a = p$ premier impair, $b = p^{\lambda-1}$, on obtient

$$s(\alpha, p^\lambda) = p^{\lambda-1} s(\alpha, p) = \begin{cases} 0 \quad (\bmod p^\lambda) & \text{si} \quad \alpha \not\equiv 0 \; (\bmod p-1), \\ -p^{\lambda-1} \; (\bmod p^\lambda) & \text{si} \quad \alpha \equiv 0 \; (\bmod p-1). \end{cases}$$

De même, en faisant $a = 2^{\lambda-1}$, $b = 2$, on obtient par récurrence, en partant de $s(\alpha, 8)$,

$$s(\alpha, 2^\lambda) = \begin{cases} 2^{\lambda-1} \; (\bmod 2^{\lambda+1}) & \text{si} \quad \alpha \text{ est pair}, \\ 0 \quad (\bmod 2^{\lambda+1}) & \text{si} \quad \alpha \text{ est impair}, \end{cases}$$

avec

$$s(\alpha, 4) = \begin{cases} 2 \; (\bmod 8) & \text{si} \quad \alpha \text{ est pair}, \\ 4 \; (\bmod 8) & \text{si} \quad \alpha \text{ est impair}, \end{cases}$$

$$s(\alpha, 2) = 1.$$

Ainsi on a d'une manière générale

$$s(\alpha, p^\lambda) \equiv \begin{cases} 0 \quad (\bmod p^\lambda) & \text{si} \quad \alpha \not\equiv 0 \; [\bmod \varphi(p^\sigma)] \\ -p^{\lambda-1} \; (\bmod p^\lambda) & \text{si} \quad \alpha \equiv 0 \; [\bmod \varphi(p^\sigma)] \end{cases} \qquad p^\lambda \geq 3.$$

D'ailleurs la seconde des deux formules corrélatives (n° 4)

$$S(\alpha, N) + N^\alpha = \sum_d d^\alpha s(\alpha, d'), \qquad dd' = N,$$

$$s(\alpha, N) = \sum_d^N \varepsilon_d d^\alpha [S(\alpha, d') + d'^\alpha] = \sum_d^N \varepsilon_d d^\alpha S(\alpha, d')$$

fournit immédiatement le même résultat.

En désignant par Ω le produit des facteurs premiers différents p_j de N tels que $\alpha \equiv 0$ [mod $\varphi(p_j^\gamma)$] en même temps que

$$\varphi\left(\frac{N}{p_j^{\lambda_j}}\right) \not\equiv 0 \qquad (\text{mod } p_j),$$

on aura

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} s(\alpha, N) &\equiv - N \sum_j \left(\frac{N}{p_j^{\lambda_j}}\right)^{\alpha-1} \varphi\left(\frac{N}{p_j^{\lambda_j}}\right) \frac{1}{p_j} \ (\text{mod } N) \\ &= \frac{gN}{\Omega} + kN \end{aligned} \right\} \qquad (N \geq 3)$$

en posant

$$g = -\sum_j \frac{\Omega}{p_j} \left(\frac{N}{p_j^{\lambda_j}}\right)^{\alpha-1} \varphi\left(\frac{N}{p_j}\right),$$

et

$$S'(\alpha, N) = \frac{N}{\Omega}.$$

g est premier à Ω et divisible par $\left(\frac{N}{\Omega}\right)^{\alpha-1}$; si α est impair, $\Omega = g = 1$; si α est pair, Ω n'est pair que si N se réduit à une puissance de 2 et alors $\Omega = 2$.

Ainsi $s'(2, 12) = 4$, $s(2, 16) = 8$, $s(1, 48) = s(3, 48) = 48$, $s'(2, 48) = 16$.

Comme pour S, si q est un diviseur commun de N et de α, on aura pour $s(\alpha, N)$ une valeur déterminée (mod qN) indépendamment du système de restes que parcourt la variable de sommation. Donc k sera déterminé (mod q) et, si l'on pose $s(\alpha, N) = \frac{g'N}{\Omega}$, les différentes valeurs de g' seront de la forme $g' = g + k\Omega$. Je ne m'arrêterai qu'au

cas où $q = 2$. Alors s^α prend $\frac{1}{2}\varphi(\mathrm{N})$ valeurs de la forme $8n + 1$. Donc

$$s^\alpha + (\mathrm{N} - s)^\alpha \equiv 1\, s^\alpha \pmod{2\mathrm{N}},$$
$$\mathrm{S}(\alpha, \mathrm{N}) \equiv m.16 + \varphi(\mathrm{N}) \pmod{2\mathrm{N}}.$$

Donc, si $\mathrm{N} \equiv \pm 2, \pm 4, 8 \pmod{16} = 2^\nu \mathrm{N}'$ (N' impair) et pourvu que $\varphi(\mathrm{N}') \equiv 0 \pmod 4$, Ω étant alors impair,

$$\mathrm{S}^{(2\mathrm{N})}(\alpha, \mathrm{N}) = \frac{2\mathrm{N}}{\Omega}.$$

Si $\varphi(\mathrm{N}') \equiv 2 \pmod 4$, Ω est encore impair, et l'on a

$$\mathrm{S}^{(2\mathrm{N})}(\alpha, \mathrm{N}) = \frac{\mathrm{N}}{\Omega},$$

et si $\mathrm{N}' = 1$, les formules du début donnent le même résultat.

Soit maintenant $\mathrm{N} \equiv 0 \pmod{16} = 2^\nu \mathrm{N}' = ab$, N' impair, $b = 2^\beta$, $a \equiv \pm 4, 8 \pmod{16}$. La formule (1) montre que $\mathrm{S}(\alpha, \mathrm{N})$ contient 2 à la puissance $\nu + 1$ si $\varphi(\mathrm{N}') \equiv 0 \pmod 4$, et seulement à la puissance ν si $\varphi(\mathrm{N}') \not\equiv 0 \pmod 4$.

Donc, quel que soit le nombre pair $\mathrm{N} = 2^\nu \mathrm{N}'$ (N' impair), on aura, si α est pair,

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{S}(\alpha, \mathrm{N}) = \dfrac{g'\mathrm{N}}{\Omega} & (\alpha \text{ pair}), \\ g' \equiv 0 \pmod 2 & \text{si} \quad \varphi(\mathrm{N}') \equiv 0 \pmod 4, \\ g' \equiv 1 \pmod 2 & \text{si} \quad \varphi(\mathrm{N}') \not\equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Si α est impair, $\mathrm{S}(\alpha, \mathrm{N})$ est encore déterminé selon le module $2\mathrm{N}$. Tout d'abord, si N est impair, $\mathrm{S}(\alpha, \mathrm{N})$ sera paire toujours et seulement quand $\varphi(\mathrm{N}) \equiv 0 \pmod 4$, chaque valeur de la variable de sommation s donnant avec la valeur $\mathrm{N} - s$ une somme $s^\alpha \pm (\mathrm{N} - s)^\alpha$ impaire (et cela est encore vrai si α est pair).

Si N est pair, on a (en supposant $\mathrm{N} \geq 3$)

$$s^\alpha + (\mathrm{N} - s)^\alpha \equiv \alpha \mathrm{N} s^{\alpha-1} \pmod{2\mathrm{N}}, \qquad s^{\alpha-1} \equiv 1 \pmod 8.$$

En faisant donc parcourir à s les $\frac{1}{2}\varphi(\mathrm{N})$ nombres premiers à N

et $< \frac{N}{2}$ on obtient

$$(4)\qquad \begin{cases} s(\alpha, N) = \frac{g'N}{\Omega} & (\alpha \text{ impair}), \\ g' \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{si} & \varphi(N) \equiv 0 \pmod 4, \\ g' \equiv 1 \pmod 2 \quad \text{si} & \varphi(N) \not\equiv 0 \pmod 4, \end{cases}$$

et ici $\Omega = 1$.

Les formules (3) et (4) subsistent si N est impair.

La relation $g' \equiv g + k\Omega \pmod 2$ détermine la parité de k si $\Omega \neq 2$.

Si $\Omega = 2$ (donc $N' = 1$ et α est pair), les formules du début donnent $k \equiv 0 \pmod 2$.

En résumé, on peut écrire, $E[x]$ désignant le plus grand entier contenu dans x,

$$k \equiv E[\tfrac{1}{2}\varphi(N')] \pmod 2 \qquad \text{si} \qquad \alpha \text{ est pair } (N = 2^\nu N' \geqq 2);$$
$$k \equiv 1 + \tfrac{1}{2}\varphi(N) \pmod 2 \qquad \text{si} \qquad \alpha \text{ est impair } (N \geqq 3).$$

17. Arrivons maintenant aux sommes $\varpi(\alpha, D)$ et observons de suite que $\varpi(0, D) = \psi(0, D)$, $\varpi(\alpha, Q^2) = s(\alpha, Q^2)$.

J'appellerai *complément quadratique* d'un nombre A le produit pris avec le signe de A de tous les facteurs premiers différents de A qui entrent dans A à une puissance impaire.

Lorsque s et t parcourent un système de restes positifs selon les modules m, n respectivement, m et n étant deux discriminants premiers entre eux, si μ et ν sont les compléments quadratiques respectifs de m et de n, $sm\mu + tn\nu$ parcourt un système de restes positifs selon le module mn et l'on aura

$$\varpi(\alpha, mn) \equiv \sum_{s,t} \left(\frac{mn}{sm\mu + tn\nu}\right)(sm\mu + tn\nu)^\alpha \pmod{mn}$$

ou

$$\varpi(\alpha, mn) \equiv (m\mu)^\alpha \varpi(0, m)\varpi(\alpha, n) + (n\nu)^\alpha \varpi(0, n)\varpi(\alpha, m) \pmod{mn}.$$

On voit que si ni m ni n ne sont des carrés, $\varpi(\alpha, mn) \equiv 0 \pmod{mn}$.

Plus généralement, si les discriminants $a_1, a_2, \ldots,$ ayant pour produit A, sont premiers entre eux deux à deux et si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont leurs compléments quadratiques de produit $\mathcal{A}$, on obtient, en observant que pour deux nombres quelconques a, b premiers entre eux on a toujours $\varpi(0, ab) = \varpi(0, a)\varpi(0, b)$,

$$\varpi(\alpha, \mathrm{A}) \equiv \sum_i \left(\frac{\mathrm{A}\mathcal{A}}{a_i \alpha_i}\right)^\alpha \varpi\left(0, \frac{\mathrm{A}}{a_i}\right)\varpi(\alpha, a_i) \pmod{\mathrm{A}}.$$

On est donc ramené au cas où le second argument de ϖ est un discriminant simple.

Enfin, comme précédemment, si d est un discriminant contenant tous les facteurs premiers du carré c (à une puissance quelconque), on aura

$$(1)\quad \begin{cases} \varpi(a, dc) = \mathrm{S}(0, c)\varpi(\alpha, d) \\ \qquad + \alpha|d|\mathrm{S}(1, c)\varpi(\alpha-1, d) + \ldots + |d|^\alpha \mathrm{S}(\alpha, c)\varpi(0, d), \end{cases}$$

où le second argument est un discriminant fondamental simple.

Tout d'abord, si d est un nombre premier impair discriminant fondamental de $dc = \delta$ (d'après notre hypothèse δ est simple), on aura

$$(2)\qquad \varpi(\alpha, dc) \equiv c\,\varpi(\alpha, d) \pmod{dc}.$$

Il s'agit de calculer $\varpi(\alpha, d)$. Soit $|d| = p$. Il y a $\varphi\left(\frac{p-1}{2}\right)$ nombres a' appartenant à l'exposant $\frac{p-1}{2}$, et ces nombres sont parmi les résidus quadratiques a de p. Si α n'est pas un multiple de $\frac{p-1}{2}$ (ce qui suit ne s'applique donc pas à $p = 3$), $a'^\alpha - 1$ sera premier à p et la congruence

$$a'^\alpha \sum a^\alpha \equiv \sum a^\alpha \pmod{p}$$

où la sommation s'étend à tous les nombres $a < p$ donnera

$$\sum a^\alpha \equiv 0 \pmod{p}.$$

En désignant par b les non-résidus, on aura de même

$$a'^{\alpha}\sum b^{\alpha} \equiv \sum b^{\alpha} \pmod{p},$$

d'où

$$\sum b^{\alpha} \equiv 0 \pmod{p},$$

la sommation s'étendant pareillement à tous les nombres $b < p$. Donc

$$\varpi(\alpha, d) \equiv \sum a^{\alpha} - \sum b^{\alpha} \equiv 0 \pmod{p} \qquad \text{si} \qquad \alpha \not\equiv 0 \left(\operatorname{mod} \frac{p-1}{2}\right).$$

Si $\alpha = \frac{p-1}{2}$ (et c'est toujours le cas si $p = 3$), on aura, puisque $b^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$,

$$\varpi(\alpha, d) \equiv \sum a^{\frac{p-1}{2}} - \sum b^{\frac{p-1}{2}} \equiv \frac{p-1}{2} + \frac{p-1}{2} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Si $\alpha = p - 1$,

$$\varpi(\alpha, d) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Si donc δ est impair, la formule (2) donne

$$\varpi(\alpha, \delta) \equiv \begin{cases} -p^{\lambda-1} \pmod{\delta} & \text{si} \quad \alpha \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p-1} \quad (p \geqq 3), \\ 0 \pmod{\delta} & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Si d est une puissance de 2, le calcul direct donne d'abord

$$(3) \quad \begin{cases} \varpi(\alpha, -4) \equiv \begin{cases} -2 \pmod{8} & \text{si} \quad \alpha \text{ est impair}, \\ 0 \pmod{8} & \text{si} \quad \alpha \text{ est pair}, \end{cases} \\ \varpi(\alpha, -8) \equiv \begin{cases} 8 \pmod{16} & \text{si} \quad \alpha \text{ est impair}, \\ 0 \pmod{16} & \text{si} \quad \alpha \text{ est pair}, \end{cases} \\ \varpi(\alpha, \quad 8) \equiv 0 \pmod{16}. \end{cases}$$

La formule (1) donne alors pour $|\delta| = 2^{\lambda}$ en y prenant $|d| = 2^{\lambda-2}$,

$c = 4$, et en partant de (3),

$$(4)\quad \begin{cases} \varpi(\alpha, -2^\lambda) \equiv \begin{cases} -2^{\lambda-1} \pmod{2^{\lambda+1}} & \text{si} \quad \alpha \text{ est impair}, \\ 0 \pmod{2^{\lambda+1}} & \text{si} \quad \alpha \text{ est pair}, \end{cases} & (\lambda \text{ pair}) \\ \varpi(\alpha, -2^\lambda) \equiv \begin{cases} 2^{\lambda} \pmod{2^{\lambda+1}} & \text{si} \quad \alpha \text{ est impair}, \\ 0 \pmod{2^{\lambda+1}} & \text{si} \quad \alpha \text{ est pair}, \end{cases} & (\lambda \text{ impair}) \\ \varpi(\alpha, \quad 2^\lambda) \equiv 0 \pmod{2^{\lambda+1}} \qquad (\lambda \text{ impair}). \end{cases}$$

En résumé, $\varpi'(\alpha, \delta) = \delta$ si α n'est pas un multiple impair de $\frac{1}{2}\varphi(\delta_0)$ et si $\delta_0 = 8$ (δ_0 est le discriminant fondamental du discriminant simple δ). Dans tous les autres cas, $\varpi'(\alpha, \delta) = \frac{\delta}{\delta_0}$.

Composons maintenant ces résultats élémentaires par les formules du début. Soit D un discriminant quelconque non carré, de discriminant fondamental D_0 et de discriminant essentiel $\mathfrak{D}$. Posons

$$D = D_0 Q^2 = D_0 Q_0^2 \mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{D}\mathfrak{Q}^2.$$

On aura

$$\varpi(\alpha, D) \equiv \mathfrak{Q}^{2\alpha} \varphi(\mathfrak{Q}^2)\, \varpi(\alpha, \mathfrak{D}) \pmod{D},$$

et l'on pourra écrire, pour $\alpha \geqq 1$,

$$(5)\quad \begin{cases} \varpi(\alpha, D) = \dfrac{\gamma D}{\omega} + \varkappa D, \\ \varpi'(\alpha, D) = \dfrac{D}{\omega}, \end{cases}$$

ω ayant la signification suivante :

Si D_0 ne contient qu'un seul facteur premier $p\,(p > 0)$ *et seulement à la puissance* σ (la plus petite qui fasse de p^σ la valeur absolue d'un discriminant) et si en même temps α est de la forme $\frac{2k+1}{2}\varphi(p^\sigma)$ avec $\varphi(\mathfrak{Q}) \not\equiv 0 \pmod{p}$, $\omega = p$; dans tous les autres cas où D n'est pas carré, $\omega = 1$.

On voit que ω ne pourra être pair, c'est-à-dire égal à 2, que si $D = -2^\lambda$, λ étant pair et α impair. γ est toujours premier à ω.

Ainsi $\varpi'(1, -36) = 36$ [ici $\alpha = 1$ est bien un multiple impair de $\frac{1}{2}\varphi(2^6) = 1$; mais $\varphi(2) = \varphi(3) \equiv 0 \pmod 2$]; $\varpi'(\alpha, 48) = 48$, quel que soit α; $\varpi'(\alpha, -48) = 16$, si α est impair; $\varpi'(\alpha, 48) = 48$, si α est pair; $\varpi(2, 80) = 16$, $\varpi'(2, 160) = 160$.

18. Si α et D ont un plus grand commun diviseur q, $\varpi(\alpha, \mathrm{D})$ conserve une valeur déterminée $\pmod q$ quand on change le système de restes que parcourt s. Donc $\varkappa$ est déterminé $\pmod q$ et les différentes valeurs de γ sont de la forme $\gamma' = \gamma + \varkappa\omega$.

Je ne m'arrêterai encore qu'au cas où $q = 2$ et je poserai $\mathrm{D} = 2^\delta \mathrm{D}'$, $\delta \geqq 2$, $\mathrm{D}' = \pm \mathrm{P}$ (P impair > 0), D n'étant pas un carré.

Soit d'abord $\mathrm{D} > 0$. Comme alors $\left(\frac{\mathrm{D}}{s}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}}{-s}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}-s}\right)$, on aura

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{s}\right)s^\alpha + \left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}-s}\right)(\mathrm{D}-s)^\alpha \equiv 2\left(\frac{\mathrm{D}}{s}\right)s^\alpha \pmod{2\mathrm{D}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\varpi(\alpha, \mathrm{D}) &\equiv m.16 + 2\varpi(0, \mathrm{D}) \pmod{2\mathrm{D}} \\ &\equiv m.16 \pmod{2\mathrm{D}}.\end{aligned}$$

Par suite, si $\mathrm{D} \equiv \pm 4, 8 \pmod{16}$, on aura $\varpi^{(2\mathrm{D})}(\alpha, \mathrm{D}) = \frac{2\mathrm{D}}{\omega}$.

Si $\mathrm{D} \equiv 0 \pmod{16}$, la formule

$$\varpi(\alpha, dc) = \mathrm{S}(0, c)\,\varpi(\alpha, d) + \alpha\,|d|\,\mathrm{S}(1, c)\,\varpi(\alpha - 1, d) + \ldots,$$

où l'on fait $dc = \mathrm{D}$, $c = 2^{2\beta}$, $d \equiv \pm 4, 8 \pmod{16}$ donne

$$\varpi^{(2\mathrm{D})}(\alpha, \mathrm{D}) = \frac{2\mathrm{D}}{\omega}.$$

Soit maintenant $\mathrm{D} < 0$. Alors $\left(\frac{\mathrm{D}}{s}\right) = -\left(\frac{\mathrm{D}}{|\mathrm{D}| - s}\right)$ et

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{D}}{s}\right)s^\alpha + \left(\frac{\mathrm{D}}{|\mathrm{D}|-s}\right)(|\mathrm{D}| - s)^\alpha &\equiv \alpha\,\mathrm{D} \pmod{2\mathrm{D}} \\ &\equiv 0 \pmod{2\mathrm{D}};\end{aligned}$$

de fait ω est alors égal à 1, car α étant pair ne peut être multiple impair de $\frac{1}{2}\varphi(\omega)$ qui est ici impair, puisque $-\omega$ est un discriminant.

Si α est impair, $\varpi(\alpha, D)$ est encore déterminé selon le module $2D$. Tout d'abord, si D est impair, $\varpi(\alpha, D) \equiv \frac{1}{2}\varphi(D) \pmod 2$ comme $S(\alpha, D)$ (et cela même quand α est pair).

Supposons D pair. Si $D > 0$, on a, comme tout à l'heure,

$$\left(\frac{D}{s}\right)s^\alpha + \left(\frac{D}{D-s}\right)(D-s)^\alpha \equiv \left(\frac{D}{s}\right)\alpha D s^{\alpha-1} \equiv D\left(\frac{D}{s}\right) \pmod{2D},$$

$$\varpi(\alpha, D) \equiv \frac{D}{2}\varpi(0, D) \equiv 0 \pmod{2D}.$$

Si $D < 0$, il faut distinguer plusieurs cas.

Soit $\delta = 2$, $D = 4D' = -4P$, $P \equiv +1 \pmod 4$. On aura, pour $s < 2P$,

$$\left(\frac{D}{s}\right) = -\left(\frac{D}{s+2P}\right) = \left(\frac{D}{2P-s}\right),$$

$$\left(\frac{D}{s}\right)s^\alpha + \left(\frac{D}{2P-s}\right)(2P-s)^\alpha + \left(\frac{D}{s+2P}\right)(s+2P)^\alpha + \left(\frac{D}{4P-s}\right)(4P-s)^\alpha$$
$$= \left(\frac{D}{s}\right)[s^\alpha - (s-2P)^\alpha - (s+2P)^\alpha + (s-4P)^\alpha] \equiv -4\alpha P\left(\frac{D}{s}\right)s^{\alpha-1} \pmod{2D}.$$

Donc les termes de $\varpi(\alpha, D)$ se réunissent 4 par 4 pour donner une somme $\equiv D \pmod{2D}$. Donc, si $\varphi(D) \equiv 0 \pmod 8$, c'est-à-dire si $\varphi(D) \equiv 0 \pmod 4$, on a bien $\varpi(\alpha, D) \equiv 0 \pmod{2D}$; si $\varphi(P) \not\equiv 0 \pmod 4$ et $P \neq 1$, on aura $\varpi(\alpha, D) \equiv D \pmod{2D}$. Ainsi, $\varpi(1, 36) \equiv 36 \pmod{72}$.

Soit toujours $D = -4P$, mais $P \equiv -1 \pmod 4$. On aura, pour $s < 2P$,

$$\left(\frac{D}{s}\right) = \left(\frac{D}{s+2P}\right), \qquad \left(\frac{D}{s}\right) = -\left(\frac{D}{2P-s}\right),$$

$$\left(\frac{D}{s}\right)s^\alpha + \left(\frac{D}{2P-s}\right)(2P-s)^\alpha + \left(\frac{D}{s+2P}\right)(s+2P)^\alpha + \left(\frac{D}{4P-s}\right)(4P-s)^\alpha$$
$$= \left(\frac{D}{s}\right)(4s^\alpha - 4\alpha P) \equiv 0 \qquad \pmod 8.$$

Donc

$$\varpi^{2D}(\alpha, D) = \frac{2D}{\omega}.$$

Soit maintenant $\delta = 3$, $D = 8D' = -8P$ ($P > 0$ impair). On aura,

pour $s < 4P$. $\left(\frac{D}{s}\right) = -\left(\frac{D}{s+4P}\right)$, donc

$$\left(\frac{D}{s}\right)s^\alpha + \left(\frac{D}{s+4P}\right)(s+4P)^\alpha \equiv -4\alpha P\left(\frac{D}{s}\right)s^{\alpha-1} \pmod{2D}$$
$$\equiv -4P\left(\frac{D}{s}\right) \pmod{2D}.$$

Mais ici $\left(\frac{D}{s}\right) = \left(\frac{D}{4P \pm s}\right)$ et les termes de $\varpi(\alpha, D)$ se groupent quatre par quatre pour donner une somme $\equiv D \pmod{2D}$. Comme d'ailleurs ici $\varphi(D) \equiv 0 \pmod 8$ (en supposant $P \neq 1$), on a encore $\varpi(\alpha, D) \equiv 0 \pmod{2D}$. Ainsi $\varpi(1, -24) \equiv 0 \pmod{48}$.

Si maintenant $D \equiv 0 \pmod{16}$, la formule

$$\varpi(\alpha, dc) = S(0, c)\varpi(\alpha, d) + \alpha|d|S(1, c)\varpi(\alpha-1, d) + \ldots,$$

donnera, pour $dc = D$, $c = 2^{2\beta}$, $d = -4P, -8P$, P étant impair > 0,

$$\varpi(\alpha, D) \equiv 0 \pmod{2^{\delta+\varepsilon}}:$$

$D = 2^\delta D'$, α impairs et $D' < -1$; $\delta > 0$;

$\varepsilon = 0$ si $D' \equiv -1 \pmod 4$ avec $\varphi(D') \not\equiv 0 \pmod 4$, δ pair;

$\varepsilon = 1$ dans tous les autres cas.

On remarquera que, si D' est < 0 et $\equiv -1 \pmod 4$ avec $\varphi(D') \not\equiv 0 \pmod 4$, on a nécessairement $D' = -p^{2\lambda}$, p étant un nombre premier de la forme $4n-1$; le discriminant fondamental, si δ est pair se réduit à -4 et $D = -2^{2\beta}p^{2\lambda}$.

En résumé l'on peut écrire

(6) $\varpi(\alpha, D) = \frac{\gamma' D}{\omega}$, $D = 2^\delta D'$ non carré, D' impair;

si $\delta = 0$, γ' est pair sauf si $\varphi(D') \not\equiv 0 \pmod 4$;

si $\delta > 0$, γ' est impair quand, α étant impair, on a, ou bien $D = -2^\delta$, ou bien $D = -2^{2\beta}p^{2\lambda}$, $p \equiv -1 \pmod 4$ étant premier positif; γ' est pair dans tous les autres cas.

La relation $\gamma' = \gamma + \alpha\omega$ détermine la parité de α si $\omega \neq 2$. Or,

si $\omega \neq 2$ donc $\omega \not\equiv 1 \pmod 2$, ou bien $\mathfrak{Q} = 1$ et alors $\gamma = \pm 1$, ou bien $\mathfrak{Q} > 1$ et γ est pair.

Si $\omega = 2$ c'est que $D = \pm 2^\lambda$ et les formules (4) montrent que α est toujours pair.

19. En désignant par a_1 ceux des restes s, dans s et dans ϖ, pour lesquels $\left(\frac{D}{a_1}\right) = +1$, par a_{-1} ceux pour lesquels $\left(\frac{D}{a_{-1}}\right) = -1$, on saura, par ce qui précède, déterminer la valeur $\pmod D$ des sommes $\sum a_1^\alpha, \sum a_{-1}^\alpha$ étendues respectivement à un système de nombres a_1 et de nombres a_{-1} compris entre o et $|D|$, c'est-à-dire les sommes

$$\chi_\varepsilon(\alpha, D) = \chi(\alpha, D) = \tfrac{1}{2}[s(\alpha, D) + \varepsilon\varpi(\alpha, D)],$$

$$\varepsilon = \pm 1, \qquad \chi_1 = \sum a_1^\alpha, \qquad \chi_{-1} = \sum a_{-1}^\alpha.$$

On a immédiatement en effet

$$(1) \qquad \chi_\varepsilon(\alpha, D) = \frac{-|D|}{2} \sum_k \varphi\left(\frac{D^\alpha}{p_k^{\alpha\lambda_k}}\right)\frac{\theta}{p_k} \qquad \pmod D,$$

$|D| = \prod_i p_i^{\lambda_i}$ étant la décomposition de $|D|$ en facteurs premiers, k parcourant les facteurs de $\Omega\omega$; $\theta = \varepsilon$, si $p_k = \omega$; $\theta = 1$, si $p_k \neq \omega$ est nécessairement premier à Ω sans quoi α devrait être un multiple à la fois pair et impair de $\frac{1}{2}\varphi(\omega^\sigma)$.

On peut encore écrire, d'après les formules (3) et (4) du n° **16** et la formule (6) du n° **18**,

$$(2) \qquad \chi_\varepsilon(\alpha, D) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{g'|D|}{\Omega} + \varepsilon\frac{\gamma' D}{\omega}\right).$$

La formule (1) montre que

$$\chi'_\varepsilon(\alpha, D) = \frac{D}{2^\eta \Omega\omega}, \qquad \eta = 0 \quad \text{ou} \quad 1,$$

et η est évidemment nul si D est impair, puisque χ' est entier.

Si $D = 2^\delta D'$ (D' impair, $\delta > 0$) non carré, on a, d'après (2),

$$\eta \equiv g'\omega + \varepsilon\gamma'\Omega \pmod 2, \qquad 0 \leq \eta \leq 1,$$

et il faut distinguer plusieurs cas :

Soit α pair donc ω impair. Si $D' \neq \pm 1$, Ω est impair, $\gamma' \equiv 0 \pmod 2$. Donc $\eta \equiv g' \pmod 2$. Donc η ne peut être égal à 1 que si

$$\varphi(D') \not\equiv 0 \pmod 4,$$

c'est-à-dire que si $D = \pm 2^\delta p^\lambda$, p étant un nombre positif $\equiv -1 \pmod 4$. Ainsi $\chi'_1(2, \pm 12) = 2$, $\chi'_1(2, 24) = 4$.

Si $D' = \pm 1$ c'est-à-dire $D = \pm 2^\delta$, $\Omega = 2$, g' est impair et de même ω puisque α est pair. Donc $\eta = 1$.

Ainsi $\chi'_1(2, 24) = 1$, $\chi'_1(2, \pm 8) = 2$.

Soit α impair, donc $\Omega = 1$. g' ne cesse d'être pair que si $\delta = 2$ avec $D' = -1$ et alors $\omega = 2$. Donc $\eta \equiv \gamma' \pmod 2$. Donc η ne peut être égal à 1 que si $D = -2^{2\beta} p^{2\lambda}$, p étant un nombre premier $\equiv -1 \pmod 4$ ou si $D = -2^\delta$.

Ainsi

$$\chi'_1(1, 8) = 8, \qquad \chi'_1(1, -8) = 4, \qquad \chi'_1(1, -16) = 4,$$
$$\chi'_1(1, -24) = 24, \qquad \chi'_1(1, -36) = 18, \qquad \chi'_1(1, -72) = 72.$$

En résumé η n'est égal à 1 que pour les discriminants non carrés de la forme $D = \pm 2^\delta p^\lambda$ ($\delta > 0$) p étant un nombre premier $\equiv -1 \pmod 4$ et $\neq -1$, et encore faut-il, si α est impair, que D soit négatif et que sa valeur absolue soit un carré ou une puissance de 2.

En particulier, si D_0 est un discriminant fondamental,

$$\chi(1, D_0) \equiv 0 \pmod{D_0}, \qquad D_0 \neq -3, \qquad -4, \qquad -8.$$

Si $D' \equiv 1 \pmod 4$ on aura toujours, pour $D = 2^\delta D'$,

$$\chi'(\alpha, D) = \frac{D}{\omega} \qquad \alpha \text{ impair.} \tag{3}$$

Ainsi $\chi'(1, -3) = 1$, $\chi'(3, -7) = 1$.

Les sommes $\sum r^\alpha, \sum t^\alpha$ (α impair) étendues à tous les nombres $r, t \pmod{N}$ pour lesquels $\left(\frac{r}{N}\right) = +1$, $\left(\frac{t}{N}\right) = -1$ seront donc toujours divisibles par $\frac{N}{\omega}$ si $|N|$ est un discriminant.

Si $N = 2N'$ (N' impair), elles seront divisibles par N pourvu que r ou t parcoure des valeurs impaires donnant toutes un même reste $\pmod{8}$.

20. N étant un entier quelconque, j'entendrai par ζ (ou ζ', ζ'', ...) une unité positive ou négative choisie de la manière suivante :

Si $N \not\equiv 2 \pmod{4}$, ζN désignera un discriminant, en sorte que, si N est alors pair, ζ pourra être pris indifféremment égal à ± 1;

Si $N \equiv 2 \pmod{4} = 2N'$, $\zeta N'$ sera $\equiv 1 \pmod{4}$.

Si $N = PQ$, on pourra toujours, au moins d'une manière et au plus de quatre, trouver trois unités ζ, ζ', ζ'' telles que $\zeta N = \zeta' P . \zeta'' Q$.

J'entendrai encore par $a_\varepsilon (\varepsilon = \pm 1)$ un nombre positif tel que $\left(\frac{\zeta N}{a_\varepsilon}\right) = \varepsilon$ et qui, lorsque $N \equiv 2 \pmod{4}$, sera supposé $\equiv \rho \pmod{8}$, ρ étant impair et le même pour tous les a_ε, d'ailleurs arbitraire. Pour chaque valeur de ε a_ε aura $\frac{1}{2}\varphi(N)$ valeurs incongrues, selon le module N si N n'est pas impairement pair, selon le module $4N$ si N est impairement pair.

A l'aide des résultats précédents il est facile d'étendre au cas d'un entier quelconque N que je supposerai d'abord n'être ni un carré impair ni le double d'un tel carré la décomposition connue de l'équation $\theta_N(x) = 0$ aux racines primitives de $x^N = 1$ par l'adjonction de $\sqrt{\zeta N}$ (en prenant $\zeta = -1$ si N est un carré pair, de manière que ζN ne soit pas un carré).

Posons

$$A_{\zeta N, \varepsilon}(x) = A_\varepsilon(x) = \prod_{a_\varepsilon} \left(x - e^{\frac{2\pi i a_\varepsilon}{N}}\right) = a_\varepsilon^0 x^n + a_\varepsilon^1 x^{n-1} + \ldots,$$

$$n = \tfrac{1}{2}\varphi(N).$$

On aura

$$\theta_N(x) = A_1(x) A_{-1}(x),$$

$$\sum_{a_\varepsilon} e^{a_\varepsilon \frac{2\pi i k}{N}} = \tfrac{1}{2}[\sigma(k, \zeta N) + \varepsilon\psi(k, \zeta N)].$$

Les formules de Newton

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\nu=k-1} a_\varepsilon^\nu[\sigma(k-\nu, \zeta N) + \varepsilon\psi(k-\nu, \zeta N)] + ka_\varepsilon^k = 0,$$

$$a_\varepsilon^0 = 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

fournissent par récurrence les a_ε^k sous la forme $a_\varepsilon^k = y_k + \varepsilon z_k \sqrt{\zeta N}$, les y_k, z_k étant rationnels. D'ailleurs, les a_ε^k étant des entiers algébriques comme les racines dont ils sont des combinaisons entières à coefficients entiers, il en sera de même de $2y_k$, $2z_k\sqrt{\zeta N}$, donc aussi de $2y_k$, $2z_k$.

Les coefficients a_ε^k, a_ε^{n-k} sont liés l'un à l'autre par l'identité

$$x^k A_\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n e^{\frac{2\pi i}{N}\Sigma a_\varepsilon} \prod_{a_\varepsilon}\left(x - e^{-\frac{2\pi i a_\varepsilon}{N}}\right)$$

$$= (-1)^n e^{\frac{2\pi i}{N}\chi_\varepsilon(1, \zeta N)} A_{\varepsilon\zeta}(x).$$

Or, on a

$$\chi_\varepsilon(1, \zeta N) = \frac{1}{2}\left(g + \frac{\varepsilon\gamma'}{\omega}\right)\zeta N \pmod N, \qquad \chi_\varepsilon(1, \zeta N) = \frac{N}{2^\eta \omega},$$

g', γ', ω, η ayant relativement à ζN, ou à $\frac{\zeta N}{2}$ si N est impairement pair, le même sens que plus haut relativement à D.

ω ne peut jamais être > 3.

Si $\omega = 1$ et $\eta = 0$ ou 1, peu importe le signe du coefficient de πi dans l'exponentielle.

Si $\omega = 2$, c'est que $N = -2^{2\beta}$. Alors $\eta = 1$ et

$$\chi_\varepsilon(1, \zeta N) = \frac{-N\varepsilon}{4} \qquad (\text{mod } 2N)$$

sauf si $N = 4$. Donc que N soit > 4 ou $= 4$, on a

$$(-1)^n e^{\frac{2\pi i}{N}\chi_\varepsilon(1, \zeta N)} = -i\varepsilon, \qquad N = -2^{2\beta}.$$

Si $\omega = 3$, c'est que $N = 3Q^2$, les facteurs premiers de Q étant

tous $\equiv 2 \pmod 3$. Alors $g' \equiv 0 \pmod 2$ et

$$\frac{1}{Q^2}\chi_\varepsilon(1, \zeta N) \equiv \frac{-\varepsilon\gamma'}{2} \pmod 3.$$

Or $\gamma' = \gamma + \varkappa\omega \equiv \gamma \pmod 3$. Donc $\gamma' \equiv Q\varphi(Q) \equiv Q \pmod 3$. D'ailleurs γ' est ici pair et Q impair. Donc $\gamma' \equiv Q + 3 \pmod 6$ et $\frac{\gamma'}{2} \equiv -Q \pmod 3$. Donc $\frac{1}{Q^2}\chi_\varepsilon(1, \zeta N) \equiv \varepsilon Q \pmod 3$ et

$$(-1)e^{\frac{2\pi i}{N}\chi_\varepsilon(1,\zeta N)} = (-1)^n e^{\frac{2\pi i \varepsilon Q}{3}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 2\Lambda_{-75,\varepsilon}(x) &= 2x^{20} + (-1 - \varepsilon\sqrt{-3})x^{15} \\ &\quad + (-1 + \varepsilon\sqrt{-3})x^{10} + 2x^5 - 1 - \varepsilon\sqrt{-3} \\ &= 2\,\frac{x^{25} - e^{-\frac{10\pi i\varepsilon}{3}}}{x^5 - e^{-\frac{2\pi i\varepsilon}{3}}}. \end{aligned}$$

En se servant des mêmes principes on peut obtenir d'autres décompositions. Ainsi quand N est divisible par 4 et non carré, $\pm N$ est un discriminant non carré et l'on peut changer à volonté la détermination de ζ. Mais les a_ε changent en même temps, car parmi les nombres premiers à N il y en a toujours qui sont $\equiv -1 \pmod 4$, l'un des deux nombres a_ε, $N - a_\varepsilon$ par exemple. Et de fait le radical adjoint change avec ζ.

Soit $N = 2N'$, N' étant impair. Quand s parcourt les $\varphi(N)$ nombres $< N$ et premiers à N, $\frac{s + N'}{2} = s'$ parcourt les $\varphi(N')$ nombres $< N'$ et premiers à N', en sorte que

$$\theta_N(x) = \prod\left(x + e^{\frac{2\pi i s}{N}}\right) = (-1)^{\varphi N'}\theta_{N'}(-x),$$

et, en exceptant le cas où $N = 2$,

$$\theta_N(x) = \theta_{N'}(-x) = \Lambda_{\zeta N',1}(-x)\Lambda_{\zeta N',-1}(-x).$$

Ici, en posant $\varepsilon\left(\frac{2}{\zeta}\right) = \varepsilon'$, on a $A_{\zeta N, \varepsilon}(-x) = A_{\zeta N, \varepsilon'}(x)$; et le même radical a bien en effet été adjoint dans les deux décompositions puisque

$$\psi(k, \zeta N) = \psi_1(-k, \zeta N) = \left(\frac{2}{\zeta}\right)\psi_0(-k, \zeta N).$$

Soit enfin $N = PQ$, $P > 0$ contenant tous les facteurs premiers différents de Q et $\zeta N = \zeta' P . \zeta'' Q$. On aura (n° 4)

$$\theta_N(x) = \theta_P(x^Q) = A_{\zeta' P, 1}(x^Q) A_{\zeta' P, -1}(x^Q).$$

Cette décomposition correspond à l'adjonction de $\sqrt{\zeta' P}$, laquelle n'équivaut à celle de $\sqrt{\zeta N}$ que si $\zeta'' Q$ est un carré.

Appelons b_ε les nombres jouant relativement à $\zeta' P$ le rôle des a_ε relativement à ζN. On aura

$$A_{\zeta' P, \varepsilon}(x^Q) = \prod_{b_\varepsilon}\left(x^Q - e^{\frac{2\pi i b_\varepsilon}{P}}\right) = \prod_{b_\varepsilon, \nu}\left[x - e^{\frac{2\pi i (b_\varepsilon + P\nu)}{N}}\right],$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, Q.$$

Le plus grand commun diviseur de $A_{\zeta' P, \varepsilon}(x^Q)$ et de $A_{\zeta N, \varepsilon'}(x)$ $(\varepsilon' = \pm 1)$ sera $\prod_{\gamma}\left(x - e^{\frac{2\pi i \gamma}{N}}\right)$, γ parcourant ceux des nombres $b_\varepsilon + P\nu$ qui appartiennent aux a_ε.

Supposons que $\zeta' P$ soit un discriminant (contenant toujours tous les facteurs premiers différents de Q). Soit $P^{(1)}$ le plus grand diviseur non impairement pair commun à $Q = Q^{(0)} = Q^{(1)} P^{(1)}$ et à $P = P^{(0)}$, et plus généralement $P^{(i)}$ le plus grand diviseur non impairement pair commun à $Q^{(i-1)} = Q^{(i)} P^{(i)}$ et à P $(i = 1, 2, \ldots)$.

Le dernier $Q^{(s)}$ des $Q^{(i)}$ sera égal à 1 ou à 2. Soient μ, α, β^{i} les exposants des plus hautes puissances de 2 qui divisent respectivement N, P, Q^{i} et $\mu = m\alpha + r$, $r < \alpha$. On aura

$$\beta^{i} = (m - i - 1)\alpha - r,$$

et, si $r \geqq 2$, $Q^{(s)} = 1$, si $r = 1$, $Q^{s} = 2$.

Dans tous les cas, puisque

$$\zeta N = \zeta' P . \zeta^{(1)} P^{(1)} \ldots \zeta^{(s)} P^{(s)} . Q^{(s)},$$

on pourra écrire

$$\left(\frac{\zeta N}{b_\varepsilon + P\nu}\right) = \varepsilon \prod_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\zeta^{(i)} P^{(i)}}{b_\varepsilon}\right) \left(\frac{Q^{(s)}}{b_\varepsilon + P\nu}\right),$$

et le symbole $\left(\frac{\zeta N}{b_\varepsilon + P\nu}\right)$ ne dépendra de ν que si $\left(\frac{Q^{(s)}}{b_\varepsilon + P\nu}\right)$ en dépend, c'est-à-dire que si l'on a à la fois $Q^{(s)} = 2$ et $P \equiv 4 \pmod 8$, et alors même la valeur de $\left(\frac{Q^{(s)}}{b_\varepsilon + P\nu}\right)$ reste la même pour tous les ν d'une même parité. Mais cette circonstance ne peut se présenter si $\zeta' P$ contient le discriminant fondamental de ζN. Supposons que $\zeta' P$ contienne ce discriminant fondamental, autrement dit que P contienne non seulement tous les facteurs premiers différents de N, mais le facteur 2 en particulier à une puissance de la même parité que N. Si alors b' parcourt ceux des nombres b_ε tels que $\left(\frac{\zeta N}{b'}\right) = \varepsilon''$, les nombres

$$b' + P\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, Q)$$

seront tous des δ et le plus grand commun diviseur des deux polynomes considérés sera $\prod_{b'} \left(x^Q - e^{\frac{2\pi i b'}{P}}\right)$.

D'ailleurs $\sigma(k, \zeta N)$ et $\psi(k, \zeta N)$ étant nuls quand $k \not\equiv 0 \pmod Q$ (en supposant toujours que P contient non seulement tous les facteurs premiers différents de ζN, mais aussi le discriminant fondamental), les formules de Newton montrent que les a_ε^k où $k \not\equiv 0 \pmod Q$ sont tous nuls.

Ainsi soit $\zeta N = -75$, $\zeta' P = -15$, $\zeta'' Q = 5$. On a

$$X_{-15,\varepsilon}(x^5) = x^{20} + \frac{-1 + \varepsilon\sqrt{-15}}{2} x^{15} - 2x^{10} + \frac{-1 - \varepsilon\sqrt{-15}}{2} x^5 + 1,$$

et l'on a déjà trouvé

$$A_{-75,\varepsilon}(x) = \frac{x^{25} - e^{-\frac{10\pi i \varepsilon}{3}}}{x^5 - e^{-\frac{2\pi i \varepsilon}{3}}}.$$

Le plus grand commun diviseur de $A_{-15,1}(x^5)$ et de $A_{-75,1}(x)$ par exemple est visiblement

$$\left(x^5 - e^{\frac{2\pi i}{15}}\right)\left(x^5 - e^{\frac{8\pi i}{15}}\right).$$

Dans le cas où N est un carré impair ou le double d'un carré impair, on devra recourir à l'une des deux dernières décompositions.

21. Kronecker a exprimé, pour le cas d'un discriminant fondamental négatif, les valeurs moyennes de certaines séries de Rosenhaim dans chaque genre, par des sommes analogues aux sommes ψ où les exponentielles sont remplacées par des séries simples de Jacobi. Voici comment on peut étendre son analyse au cas d'un discriminant quelconque.

Considérons d'abord la quantité

$$X[D, D_2, F(x)] = X = \sum_{h,k} \left(\frac{D_1 Q^2}{h}\right)\left(\frac{D_2 Q^2}{k}\right) F(hk),$$

$$D_1 D_2 = D = D_0 Q^2, \qquad h, k = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Si Δ, Δ' sont les discriminants fondamentaux de $D_1 = \Delta\Gamma^2$, $D_2 = \Delta'\Gamma'^2$, Γ et Γ' divisent nécessairement Q, sans quoi on pourrait enlever au discriminant fondamental $D_1 D_2 Q^{-2} = D_0$ un facteur carré. On peut donc écrire

$$X = \sum_{h,k} \left(\frac{\Delta}{h}\right)\left(\frac{\Delta'}{k}\right)\left(\frac{Q^2}{hk}\right) F(hk).$$

Or, les formules du n° 4 donnent pour $d = N = Q^2$, si α devient infini,

$$\sum_n^{\infty} \left(\frac{Q^2}{n_1, \ldots, n_q}\right) F(n_1, \ldots, n_q) = \sum_\delta^{Q} \varepsilon_\delta \sum_{n)}^{\infty} F(n_1 \delta, \ldots, n_q \delta).$$

En appliquant cette transformation à chacune des sommations simples dans X et en remplaçant $\left(\frac{\Delta}{h}\right)$, $\left(\frac{\Delta}{k}\right)$ par des sommes ψ, on obtient

$$X = \sum_{d}^{Q}\sum_{d'}^{Q} \frac{\varepsilon_d \varepsilon_{d'}}{\sqrt{\Delta}\sqrt{\Delta'}} \left(\frac{\Delta}{d}\right)\left(\frac{\Delta}{d'}\right) \sum_{s, s', h, k} \left(\frac{\Delta}{s}\right)\left(\frac{\Delta'}{s'}\right) F(hk\,dd')\, e^{-\frac{2s\pi ih}{\Delta} - \frac{2s\pi ik}{\Delta}},$$

$$s = 1, 2, \ldots, |\Delta|, \qquad s' = 1, 2, \ldots, |\Delta'|.$$

En changeant alors s en $|\Delta| - s$ et s' en $|\Delta'| - s'$, ce qui ne change pas X, et en ajoutant, il viendra

$$(1) \quad \text{si } D > 0, \quad X = \sum_{d}^{Q}\sum_{d'}^{Q} \frac{\varepsilon_d \varepsilon_{d'}}{\sqrt{\Delta}\sqrt{\Delta'}} \left(\frac{\Delta}{d}\right)\left(\frac{\Delta'}{d'}\right) \sum_{s, s', h, k} \left(\frac{\Delta}{s}\right)\left(\frac{\Delta'}{s'}\right) F(hk\,dd') \cos 2\pi\left(\frac{hs}{\Delta} + \frac{ks'}{\Delta'}\right),$$

$$(2) \quad \text{si } D < 0, \quad X = -\sum_{d}^{Q}\sum_{d'}^{Q} \frac{\varepsilon_d \varepsilon_{d'}}{\sqrt{-\Delta\Delta'}} \left(\frac{\Delta}{d}\right)\left(\frac{\Delta'}{d'}\right) \sum_{s, s', h, k} \left(\frac{\Delta}{s}\right)\left(\frac{\Delta'}{s'}\right) F(hk\,dd') \sin 2\pi\left(\frac{hs}{\Delta} + \frac{ks'}{\Delta'}\right).$$

Or on a (je prends les notations de M. Jordan),

$$(3) \quad \frac{\theta'(0)\,\theta'(u+v)}{\theta(u)\,\theta(v)} = \pi(\cot\pi u + \cot\pi v) + 4\pi \sum_{h, k} q^{2hk} \sin 2\pi(hu + kv),$$

$$q = e^{i\pi\omega}, \qquad |q| < 1.$$

Donc, si $F(x) = q^{2x}$ et $D < 0$, la double sommation faisant disparaître les cotangentes,

$$X(D, D_2, q^{2x}) = -\sum_{d}^{Q}\sum_{d'}^{Q} \frac{\varepsilon_d \varepsilon_{d'}}{4\pi\sqrt{-\Delta\Delta'}} \left(\frac{\Delta}{d}\right)\left(\frac{\Delta'}{d'}\right) \sum_{s, s'} \left(\frac{\Delta}{s}\right)\left(\frac{\Delta'}{s'}\right) \frac{\theta'(0, \omega dd')\,\theta\left(\frac{s}{\Delta} + \frac{s'}{\Delta'}, \omega dd'\right)}{\theta\left(\frac{s}{\Delta}, \omega dd'\right)\theta\left(\frac{s'}{\Delta'}, \omega dd'\right)}.$$

Soit $D_2 = \Delta' = 1$, donc $\Delta = D_0$. Dans (1) et (2) la sommation relative à s' disparaîtra et, comme (3) donne, pour $v = 0$,

$$\frac{\theta'(u)}{\theta(u)} = \pi \cot\pi u + 4\pi \sum_{h, k} q^{2hk} \sin 2h\pi u,$$

on aura ($D < 0$),

$$X(D, 1, q^{2x}) = \sum_{d}^{Q} \sum_{d'}^{Q} \frac{\varepsilon_d \varepsilon_{d'}}{4\pi\sqrt{-D_0}} \left(\frac{D_0}{d}\right) \sum_{s=1}^{s=-D_0} \left(\frac{D_0}{s}\right) \left[\pi \cot \frac{\pi s}{D_0} - \frac{\theta'\left(\frac{s}{D_0}, \omega d d'\right)}{\theta\left(\frac{s}{D_0}, \omega d d'\right)} \right].$$

Si Q est > 1, $\sum_{d'}^{Q} \varepsilon_{d'} = 0$ et la cotangente disparaît. Mais, pour écrire une formule générale plus simple, observons que, d'après la relation $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$, on a

$$\frac{2\pi K(D)}{\tau(D)\sqrt{-D}} = H(D) = -\sum_{s=1}^{s=-D} \left(\frac{D}{s}\right) \frac{d}{ds} \log\Gamma\left(\frac{s}{-D}\right) = \frac{-1}{2D} \sum_{s=1}^{s=-D} \left(\frac{D}{s}\right) \cot \frac{\pi s}{D}$$

$$(D < 0).$$

Il viendra alors

$$X(D, 1, q^{2x}) = \operatorname{sgn}(Q^2 - 1) \frac{K(D_0)}{\tau(D_0)} + \frac{\sqrt{-D_0}}{4\pi} \sum_{d}^{Q} \sum_{d'}^{Q} \varepsilon_d \varepsilon_{d'} \left(\frac{D_0}{d}\right) \sum_{s=1}^{s=-D_0} \frac{d}{ds} \log\theta\left(\frac{s}{D_0}, \omega d d'\right).$$

Cela posé, les formules du n° **15** donnent, pour $D > 0$ ou $D < 0$,

$$\frac{1}{K(D_0 Q^2)} \sum_{a,b,c}^{D_0 Q^2} \left(\frac{D_1}{A}\right) F(am^2 + bmn + cn^2)$$

$$= \sum_{d}^{Q} \frac{O(D_1, d)}{K(D_0 d^2)} \sum_{a,\, b_0 d,\, c_0 d^2}^{D_0 d^2} \left(\frac{D_1}{A}\right) \sum_{m,n} \left(\frac{d^2}{m}\right) F[d'^2(am^2 + b_0 dmn + c_0 d^2 n^2)]$$

$$= \sum_{d}^{Q} \frac{O(D_1, d)\,\tau(D_0 d^2)}{K(D_0 d^2)} \sum_{h,k} \left(\frac{D_1 d^2}{h}\right) \left(\frac{D_0 D_1^{-1} d^4}{k}\right) F(d'^2 hk)$$

$$= \sum_{d}^{Q} \frac{O(D_1, d)\,\tau(D_0 d^2)}{K(D_0 d^2)} X[D_0 d^2, D_1, F(d'^2 x)].$$

On saura donc exprimer par des séries de Jacobi la valeur moyenne

de $\sum_{m,n} q^{2(am^2+bmn+cn^2)}$ dans chaque genre, lorsque le discriminant est négatif.

Les résultats seraient analogues si l'on prenait, avec Kronecker, la fonction $F(x) = [1-(-1)^x]q^{\frac{x}{2}}$ et le développement

$$\frac{\theta'(0)\theta(u+v)}{\theta_3(u)\theta_3(v)} = 4\pi \sum_{\mu,\nu} q^{\frac{\mu\nu}{2}} \sin\pi(\mu u + \nu v),$$
$$\mu, \nu = 1, 3, 5, \ldots, +\infty.$$

Pour le caractère principal, c'est la fonction sn qui intervient alors au lieu de $\frac{\theta'}{\theta}$.

NOTE.

Des équations de M. de la Vallée Poussin relativement aux nombres premiers (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XX, 2[e] Partie, p. 362; 1896) on peut déduire la suivante

$$2\sum_{p_\varepsilon}^{p_\varepsilon<y} \frac{\log p_\varepsilon}{p_\varepsilon - 1} - \log y = -\sum_{p_0} \frac{\log p_0}{p_0 - 1} + \Gamma'(1) + \varepsilon\frac{\overline{\Pi}(D)}{\Pi(D)} - 2\varepsilon\sigma + \alpha,$$
$$\sigma = \sum_{p-1} \frac{\log p - 1}{p_{-1}^2 - 1} < \sum_{p} \frac{\log p}{p^2 - 1} < 1,$$

où D est un discriminant et où p_ε désigne un nombre premier tel que $\left(\frac{D}{p_\varepsilon}\right) = \varepsilon$, p un nombre premier quelconque, α tendant vers zéro avec $\frac{1}{y}$.

Or on a vu que, si D est négatif, $\frac{\overline{\Pi}(D)}{\Pi(D)}$ s'exprime par un nombre fini de fonctions connues. On a donc là une extension de la relation remarquable qu'il a découverte et qui se retrouve en ajoutant les deux équations contenues dans la précédente.

Aperçu sur la théorie de la bicyclette;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

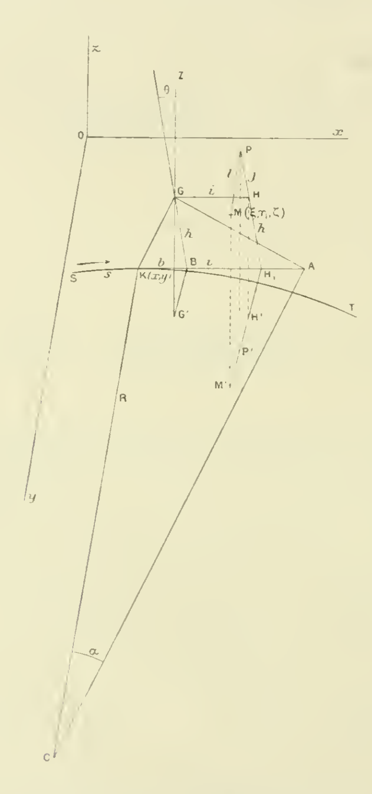
§ I. — Principales données approchées du problème mécanique de la bicyclette.

1. Dans la bicyclette, le point le plus bas K de la roue *motrice* (ou roue de derrière) a pour lieu de ses positions successives sur le sol, que nous supposerons horizontal ([1]), une courbe SKT, tangente au plan médian KGA de cette roue. Cette courbe, en y joignant la vitesse V avec laquelle elle est décrite, définit ce qu'on peut appeler le mouvement de *progression* de la bicyclette sur le sol.

Le point le plus bas A de la roue *directrice* (ou roue de devant) est d'ailleurs, à des écarts près négligeables, contenu dans le même plan et situé à une distance sensiblement invariable $KA = a$ du bas K de la roue motrice. De plus, le poids mg de tout le système, constitué en majeure partie par le cavalier, peut être censé se trouver encore dans le même plan médian, en G, un peu au-dessus du milieu de la selle, à une distance sensiblement constante $GB = h$ de la base KA de la bicyclette, et à une petite distance horizontale, également donnée, $KB = b$, en avant du point inférieur K de la roue motrice. Quant à la masse m du système, elle se trouve distribuée, tout autour de ce centre de gra-

([1]) *Voir* la figure à la page suivante.

vité G, à peu près symétriquement de part et d'autre du plan KGA, dont ses éléments dm, en M par exemple, sont distants de quantités $\mathrm{MP} = l$, autant positives (d'un côté) que négatives (de l'autre), les



pieds P de ces perpendiculaires l sur KGA étant aussi à des distances $\mathrm{PH} = j$, autant positives que négatives, de l'horizontale GH du plan et, suivant celle-ci, à des distances $\mathrm{GH} = i$, encore positives autant que négatives, en avant de G. Cette masse m, réductible sensiblement

au corps du cavalier, au cadre de la machine et au moyeu des roues, sera de forme à peu près invariable; en sorte que les trois coordonnées i, j, l, définissant la situation de ses éléments dm par rapport au triangle KGA, pourront être regardées comme indépendantes du temps t.

Cette supposition n'est évidemment qu'approximative, surtout en ce qui concerne les jambes du cavalier, dont le mouvement par rapport au cadre produit celui des pédales, et l'accompagne avec une vitesse très comparable à la vitesse de rotation des roues même à leur circonférence (environ le $\frac{1}{4}$ ou le $\frac{1}{3}$ de celle-ci pour les pieds, dans une machine ordinaire). Comme on aurait, sans doute, beaucoup de peine à tenir compte de ces mouvements propres des jambes du cavalier, et qu'il faut, dès lors, se borner à une approximation restreinte, il serait peu utile, sinon illusoire, quand on les néglige, de mettre en ligne de compte les inerties rotatives, plus faciles à évaluer, des deux roues, inerties tout au plus aussi influentes que celles des jambes; car la masse de celles-ci excède la masse de la jante et du pneu des roues dans un rapport paraissant devoir être pour le moins aussi grand que le sont les accélérations propres de ces derniers organes comparativement à celles des pieds et même des jambes.

Si l'on calculait, dans l'équation des moments (que nous aurons à employer), les petits termes correspondant à ces diverses inerties, il faudrait aussi, sans doute : 1° tenir compte des défauts de symétrie qu'offrent, de part et d'autre du plan médian du cadre, le bas du corps du cavalier et les deux pédales, toujours à 180° l'une de l'autre; les organes de transmission placés sur un seul côté (pignons et chaîne); enfin, même le guidon et la roue directrice, quand celle-ci est inclinée sur le plan médian; 2° ne plus regarder comme constante, ni en longueur, ni en direction par rapport au plan médian du cadre, la droite KA de jonction des points les plus bas des deux roues.

Un degré d'approximation supérieur à celui que pourra donner le présent aperçu exigerait donc, dans les formules, une complication beaucoup plus grande; et il y a lieu de s'en tenir à cet aperçu, au moins dans une première étude.

Enfin, et pour achever de définir les éléments de la question, l'angle θ de BG avec une verticale, comme G'Z, compté positivement

ou négativement suivant que la projection BG′ de BG sur le sol est, ou non, dirigée vers la concavité de la courbe ST, mesure l'*inclinaison* prise par la bicyclette, inclinaison qu'il faut, pour la stabilité, maintenir sans cesse entre d'assez étroites limites de part et d'autre de zéro.

2. Nous choisirons, d'une part, sur le sol, un axe Ox presque parallèle à l'arc croissant SK $= s$, décrit aux environs de l'époque t, et un axe normal Oy dirigé, de même, presque suivant les sens des rayons de courbure correspondants de ST, comme KC $=$ R, d'autre part, un axe Oz vertical, s'élevant au-dessus du sol. Les coordonnées x, y du point K seront fonctions du temps t par l'intermédiaire de l'arc s, relativement auquel leurs dérivées successives s'écriront x' et y', x'' et y'', x''' et y''', ... Quant à la dérivée première de s en t, ce sera la vitesse même V du mouvement progressif de la bicyclette; de sorte que x, y, x', y', etc. se différentieront en t par la formule symbolique

$$(1) \qquad \frac{d}{dt} = \mathrm{V}\frac{d}{ds}.$$

Dans le plan des xy, les cosinus directeurs de la tangente KBA seront x', y', le premier, peu différent de 1, le second, très petit; et ceux des perpendiculaires BG′, H$_1$H′P′M′ suivant lesquelles se projettent sur le sol les lignes BG, H$_1$HPM, cosinus dont le second est presque 1 (quand ces projections sont positives), égaleront, par suite, $-y'$, x'. Dès lors, les coordonnées du point H$_1$, situé sur KA à la distance $b+i$ de K, seront

$$x+(b+i)x', \quad y+(b+i)y';$$

et, vu les valeurs $(h+j)\sin\theta$, $l\cos\theta$ des projections H$_1$P′ et P′M′ de H$_1$H $+ j$ et de l, les coordonnées du point M′, projection de M sur le sol, excéderont les précédentes, respectivement, de

$$-y'[(h+j)\sin\theta+l\cos\theta], \qquad x'[(h+j)\sin\theta+l\cos\theta].$$

On aura donc pour les trois coordonnées variables, que j'appellerai ξ, η, ζ, du point M, évidemment situé à la hauteur

$$(h+j)\cos\theta - l\sin\theta$$

au-dessus du sol, les valeurs

$$(2)\qquad \begin{cases} \xi = x + (b+i)x' - y'[(h+j)\sin\theta + l\cos\theta], \\ \eta = y + (b+i)y' + x'[(h+j)\sin\theta + l\cos\theta], \\ \zeta = (h+j)\cos\theta - l\sin\theta. \end{cases}$$

§ II. — Relation qui existe, dans la bicyclette roulant sur un sol horizontal, entre le mouvement de progression et le mouvement d'inclinaison.

5. Cela posé, afin d'éliminer les réactions extérieures, exercées surtout aux deux points principaux K et A de contact de la bicyclette avec le sol à l'époque t, appliquons, à cet instant, le principe des moments à tout le système, par rapport à la droite KA du sol; et imaginons l'axe des x choisi exactement parallèle à cette tangente particulière KA de la courbe ST. Les deux composantes non parallèles à KA, $-\frac{d^2\eta}{dt^2}dm$, $-\frac{d^2\zeta}{dt^2}dm$, de l'inertie de l'élément de masse, dm, situé en M, auront comme bras de levier (tendant à accroître l'angle θ), M′M, $-$ H$_1$M′, ou ζ, $-(\eta - y)$: et le poids mg, concentré en G, aura, de même, le bras de levier BG′, ou $h\sin\theta$. La somme des moments étant nulle, il vient donc, après division par mh,

$$(3)\qquad g\sin\theta + \int\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}\,\frac{\eta - y}{h} - \frac{d^2\eta}{dt^2}\,\frac{\zeta}{h}\right)\frac{dm}{m} = 0.$$

Il reste à différentier deux fois en t les valeurs (2) de ζ, η, et à faire $x' = 1, y' = 0$ dans les résultats, pour substituer ceux-ci dans (3), ainsi que les valeurs (2) de η et ζ simplifiées de même. On trouve d'abord, sans difficulté,

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -\dfrac{d^2\theta}{dt^2}[(h+j)\sin\theta + l\cos\theta] - \dfrac{d\theta^2}{dt^2}[(h+j)\cos\theta - l\sin\theta], \\ \dfrac{\eta - y}{h} = \dfrac{b+i}{h}y' + x'\left(\dfrac{h+j}{h}\sin\theta + \dfrac{l}{h}\cos\theta\right) = \dfrac{h+j}{h}\sin\theta + \dfrac{l}{h}\cos\theta. \end{cases}$$

Passant ensuite à la différentiation de η, appliquons-y à x, y, ou

à leurs dérivées en s, la règle symbolique (1). Nous aurons, comme dérivée première,

$$\mathrm{V}y' + (b+i)\mathrm{V}y'' + \mathrm{V}x''[(h+j)\sin\theta + l\cos\theta] + x'\frac{d\theta}{dt}[(h+j)\cos\theta - l\sin\theta],$$

et, comme dérivée seconde,

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt}y' + \mathrm{V}^2y'' + (b+i)\left(\frac{d\mathrm{V}}{dt}y'' + \mathrm{V}^2y'''\right) + \left(\frac{d\mathrm{V}}{dt}x'' + \mathrm{V}^2x'''\right)[(h+j)\sin\theta + l\cos\theta] + 2\mathrm{V}x''\frac{d\theta}{dt}[(h+j)\cos\theta - l\sin\theta] + x'\frac{d^2\theta}{dt^2}[(h+j)\cos\theta - l\sin\theta] - x'\frac{d\theta^2}{dt^2}[(h+j)\sin\theta + l\cos\theta].$$

Celle-ci se simplifie beaucoup, à raison des formules données par deux différentiations en s de l'identité $x'^2 + y'^2 = 1$, qui définit la variable s, et par une différentiation en t de l'expression connue $x''^2 + y''^2$ du carré $\frac{1}{\mathrm{R}^2}$ de la courbure. Ces formules,

$$x'x'' + y'y'' = 0,$$
$$x'x''' + y'y''' + x''^2 + y''^2 = 0,$$
$$\mathrm{V}(x''x''' + y''y''') = \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\frac{1}{\mathrm{R}}}{dt},$$

se réduisent, attendu que $x' = 1$ et $y' = 0$ en K, à

$$x'' = 0, \qquad x''' = -y''^2, \qquad \mathrm{V}y''y''' = \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\frac{1}{\mathrm{R}}}{dt};$$

d'où il résulte, ainsi que de l'expression ci-dessus du carré de la courbure, vu d'ailleurs le signe évidemment positif de y'' (car y' croît de S à T, d'après le choix fait de l'axe des y),

$$y'' = \frac{1}{\mathrm{R}}, \qquad \mathrm{V}y''' = \frac{d\frac{1}{\mathrm{R}}}{dt}.$$

Donc la valeur, changée de signe, de la dérivée seconde de η_1, à substituer dans (3), sera simplement

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} -\frac{d^2\eta_1}{dt^2} = &-\frac{V^2}{R}\left(1-\frac{h+j}{R}\sin\theta-\frac{l}{R}\cos\theta\right)-(b+i)\frac{d\frac{V}{R}}{dt} \\ &-\frac{d^2\theta}{dt^2}[(h+j)\cos\theta-l\sin\theta]+\frac{d\theta^2}{dt^2}[(h+j)\sin\theta+l\cos\theta]; \end{aligned}\right.$$

et, d'autre part, celle de $\frac{\zeta}{h}$ qui la multiplie dans (3) est, d'après (2),

$$(6)\qquad \frac{\zeta}{h} = \frac{h+j}{h}\cos\theta - \frac{l}{h}\sin\theta.$$

Grâce à (4), (5) et (6), l'équation (3) devient explicite en V, R, θ ou leurs dérivées. En outre, de nombreux termes de son développement disparaissent, par suite de ce que, les coordonnées relatives i, j, l se trouvant comptées à partir du centre de gravité G du système et le plan KGA des ij étant un plan de symétrie de la masse $\int dm$, on a les cinq égalités

$$\int (i, j, l)\, dm = 0, \qquad \int (i, j)\, l\, dm = 0.$$

Aussi l'équation (3) des moments, où nous poserons, pour abréger,

$$(7)\qquad h' = h + \frac{1}{h}\int (j^2 + l^2)\frac{dm}{m}, \qquad b' = b + \frac{1}{h}\int ij\frac{dm}{m},$$

prend-elle la forme, très réduite,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &g\sin\theta - \frac{V^2}{R}\left[1-\frac{h}{R}\left(1+\int\frac{j^2-l^2}{h^2}\frac{dm}{m}\right)\sin\theta\right]\cos\theta \\ &\qquad - b'\frac{d\frac{V}{R}}{dt}\cos\theta - h'\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0. \end{aligned}\right.$$

4. Telle est la relation simple annoncée entre le mouvement pro-

gressif de la bicyclette, défini dans son état actuel par V quant à la vitesse, par R quant à la trajectoire, et son mouvement d'inclinaison, défini par l'angle θ du plan médian de la roue motrice avec la verticale. Cet angle devant rester très petit, on peut le substituer à son sinus et réduire $\cos\theta$ à l'unité. De plus, à raison tant de la petitesse de θ que de celle du rapport $\frac{h}{R}$, le second terme de (8) ne sera altéré que dans une proportion insignifiante, si l'on y réduit aussi à l'unité le facteur complexe entre crochets. Et la formule (8) sera simplement, après division par $-h'$ et transposition de deux termes,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b'}{h'}\frac{d\frac{V}{R}}{dt} = \frac{g}{h'}\theta - \frac{V^2}{h'R}. \tag{9}$$

On remarquera que, d'après (7), la constante h', plus grande que BG ou h, est la longueur du pendule composé constitué par le système matériel dans sa rotation autour de sa base KA, et que la constante b' diffère assez peu de la droite KB, ou b, exprimant de combien le centre G de gravité du système se trouve en avant du point le plus bas K de la roue motrice. En effet, l'intégrale $\int ij\frac{dm}{m}$, valeur moyenne du produit ij, ne peut être considérable, le système ayant, dans chacun de ses plans normaux à KA ou définis par une valeur de i, presque autant de points au-dessous du centre G, ou de H, et où j est négatif, que de points au-dessus, où j est positif. Toutefois, dans la position, assez fréquente, où le cavalier tient la tête en avant, il est visible que i et j ont même signe, positif dans le haut du corps, négatif dans le bas, en plus d'endroits qu'ils n'ont signe contraire : donc le dernier terme de (7) est alors positif. Or le terme b augmente, lui aussi, dans cette position où le cavalier se porte en avant; car ses pieds, fixés aux pédales de la machine, ne reculent pas pour cela, et le centre de gravité G ne peut qu'avancer.

Ainsi, le petit coefficient b' tout entier doit augmenter, dans un rapport sensible, quand le cavalier se penche en avant.

§ III. — Équilibre du cavalier.

5. Les dérivées premières, en t, des deux variables V, R caractéristiques du mouvement progressif, dépendent immédiatement de la volonté du cavalier et constituent, entre certaines limites, deux fonctions arbitraires du temps, laissées à sa disposition non seulement pour se diriger et avancer, mais aussi pour éviter toute exagération dangereuse de θ. En effet, l'accélération, $\frac{dV}{dt}$, du mouvement de rotation de la roue motrice à sa circonférence, est en rapport direct avec l'action des pieds du cavalier sur les pédales; et, d'autre part, le changement survenu, d'un instant à l'autre, dans le rayon R de courbure, traduit d'une manière tout aussi directe l'action de ses mains, qui règlent, grâce au guidon, le petit angle α fait, *sur le sol*, par le plan de la roue directrice, avec la trace KA du plan de la roue motrice. Car il faut remarquer que, l'extrémité A de la tangente KA à ST se mouvant tangentiellement à la trace du premier de ces plans, la normale AC à sa trajectoire va couper sous le même angle α la normale KC à la trajectoire de l'extrémité K. Or l'on reconnaît que l'intersection C de ces deux normales, centre instantané de rotation de KA, se confond avec le centre de la courbure, en K, de ST.

Effectivement, les coordonnées variables de A sont

$$x + ax', \quad y + ay';$$

et leurs dérivées par rapport à s, entre elles comme les cosinus directeurs de la trajectoire du point A, sont

$$x' + ax'', \quad y' + ay''.$$

Les deux normales KC, AC aux trajectoires ont, dès lors, comme équations respectives,

$$\begin{cases} (X - x)x' + (Y - y)y' = 0, \\ (X - x - ax')(x' + ax'') + (Y - y - ay')(y' + ay'') = 0. \end{cases}$$

X, Y désignant leurs coordonnées courantes et, en particulier, celles de leur point commun C. On peut remplacer la seconde de ces équations par le résultat de sa soustraction d'avec la première, et alors leur système devient, en tenant compte des identités précédemment utilisées entre x', y', x'' et y'',

$$(X-x)x'+(Y-y)y'=0, \qquad (X-x)x''+(Y-y)y''=1,$$

c'est-à-dire les deux formules qui déterminent le centre C(X, Y) de la courbure, en K, de l'arc ST, intersection des deux normales à ST menées en (x, y) et en $(x+x'ds, y+y'ds)$.

Par suite, le triangle rectangle CKA donne

$$KA = a = R \tang \alpha,$$

ou, à raison de la petitesse de α,

$$a = R\alpha, \qquad R = \frac{a}{\alpha}.$$

Alors l'équation (9), où il est préférable de faire figurer, au lieu de R, l'angle α qui exprime d'une manière presque immédiate l'action des mains du cavalier, devient

$$(10) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b'}{ah'}\frac{d.V\alpha}{dt} = \frac{g}{h'}\theta - \frac{V^2\alpha}{ah'}.$$

6. Sur route unie, à une allure réglée, V s'écarte peu d'une moyenne V_m, et les deux petits produits $V\alpha$, $V^2\alpha$ ne diffèrent pas sensiblement de $V_m\alpha$, $V_m^2\alpha$. L'équation (10), résolue par rapport à la dérivée seconde de θ, prend donc, en y effaçant d'ailleurs l'indice (désormais inutile) de V_m, la forme linéaire

$$(11) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{b'V}{ah'}\frac{d\alpha}{dt} - \frac{g}{h'}\left(\frac{V^2}{ga}\alpha - \theta\right).$$

L'art du cavalier consiste à régler à chaque instant, grâce au guidon, la dérivée $\frac{d\alpha}{dt}$, de manière à maintenir très petite l'inclinaison θ.

Celle-ci ne peut grandir, ou plutôt s'écarter de sa valeur normale $\frac{V^2}{gR}$ donnée par (9) sur une voie d'un rayon R de courbure assigné (¹), que si sa dérivée première $\frac{d\theta}{dt}$, rendue, par une circonstance accidentelle quelconque, un peu sensible, et égale à une petite quantité donnée ε au moment où débute la perturbation qui en résulte, conserve une valeur appréciable pendant un certain temps. La circonstance en question peut être, par exemple, la rencontre d'un caillou sur la route, ou un coup de vent soufflant de côté, ou un mouvement spontané du bicycliste, etc. Le cavalier devra donc alors faire acquérir à la dérivée seconde $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ des valeurs de signe contraire au signe même de ε et capables de réduire assez rapidement jusqu'à zéro la dérivée première $\frac{d\theta}{dt}$. Il le pourra, puisqu'il dispose immédiatement, dans (11), de la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$, que j'appellerai ω, du guidon.

On voit qu'il devra donner à cette vitesse angulaire le signe de ε, c'est-à-dire *incliner le guidon vers le côté où il se sent jeté*, et aussi que les variations *naissantes* de α et θ viendront, les premières, concourir à son action, les secondes, la contrarier. L'effet utile des premières l'emportera sur l'effet nuisible des secondes, si la vitesse ω de rotation du guidon excède la fraction $\frac{ga}{V^2}$ de la vitesse initiale ε d'inclinaison, fraction d'autant plus faible que l'allure est plus rapide, et déjà petite (pour $a = 1^m$ par exemple) quand la vitesse V approche d'une dizaine de mètres par seconde.

En effet, dans le second membre de (11), le binome $\frac{V^2}{ga}\alpha - \theta$, nul à l'instant initial $t = 0$ de la perturbation où $\theta = \frac{V^2}{ga}\alpha$ et où la dérivée décroissante $\frac{d\theta}{dt}$ vaut ε, prendra le signe de $\frac{d\alpha}{dt}$ ou de ε, $\frac{V^2}{ga}\alpha$ y variant.

(¹) Le rayon R de courbure de la trajectoire effective ne figurant plus explicitement dans les équations (10) ou (11) du mouvement, je désignerai désormais par R le rayon de courbure de la route (ou du sentier) que veut suivre le bicycliste.

par hypothèse, plus vite que ne fait le produit εt, tandis que θ, au contraire, varie moins que εt. Le second membre aura donc son dernier terme, en α et θ, de même signe que le premier, en $\frac{d\alpha}{dt}$.

7. Supposons, pour simplifier, ε assez petit, ou ω assez grand, pour que $\frac{d\theta}{dt}$ s'annule avant que θ ait eu le temps de varier d'une manière notable. Alors le dernier terme binome de (11), d'abord nul, aura valu sensiblement

$$-\frac{g}{h'}\frac{V^2}{ga}\int_0^t \frac{d\alpha}{dt}\,dt = -\frac{V^2}{ah'}\int_0^t \omega\,dt.$$

Et l'équation (11), multipliée par dt, puis intégrée durant tout le petit temps τ nécessaire pour annuler la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ d'inclinaison, qui était d'abord ε, donnera, en changeant les signes,

(12) $$\varepsilon = \frac{b'V}{ah'}\int_0^\tau \omega\,dt + \frac{V^2}{ah'}\int_0^\tau dt\int_0^t \omega\,dt.$$

Désignons par ζ l'angle total $\int_0^\tau \omega\,dt$ dont le guidon aura tourné. La vitesse angulaire moyenne du guidon aura donc été $\frac{\zeta}{\tau}$, et l'on obtiendra une valeur approchée du dernier terme de (12) en y remplaçant ω par cette moyenne. La formule (12) devient alors la relation, entre ε, ζ et τ,

(13) $$\varepsilon = \frac{V}{a}\left(\frac{b'}{h'} + \frac{V\tau}{2h'}\right)\zeta.$$

La rotation ζ du guidon est d'autant moindre, qu'elle a eu un temps τ plus long pour s'effectuer et produire son effet d'annulation sur la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ de renversement. La valeur correspondant à l'hypothèse ($\tau = 0$) d'une action instantanée serait $\frac{ah'}{b'V}\varepsilon$; de sorte qu'on aura

(14) $$\zeta < \frac{ah'}{b'V}\varepsilon.$$

Voyons maintenant ce qui arrivera une fois la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ de renversement annihilée.

Raisonnons toujours dans l'hypothèse qu'elle l'ait été assez vite pour qu'on puisse négliger la variation totale subie par θ durant le petit temps écoulé τ, variation dont la rapidité a décrû de ε à zéro, et qui est comparable, par conséquent, à $\frac{\varepsilon\tau}{2}$. Alors le cavalier, s'il veut éviter d'avoir bientôt à neutraliser une perturbation de sens contraire, pourra cesser d'influer sur θ, et annihiler cependant, à son tour, le petit écart total ζ éprouvé par l'angle α des traces des deux roues sur le sol, afin de retrouver le rayon primitif R de courbure de sa trajectoire, qui lui est imposé par la configuration du chemin à suivre. Il devra, pour cela, faire vérifier désormais par α l'équation (11) débarrassée de son premier terme, c'est-à-dire, s'il compte les temps à partir du moment où θ a eu sa dérivée annulée, adopter pour la partie variable $\Delta\alpha$, devenue ζ, de l'angle α, la formule

$$(15) \qquad \Delta\alpha = \zeta e^{-\frac{Vt}{b'}},$$

qui réduit très sensiblement l'équation (11) à $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$.

On voit qu'alors cette partie variable $\Delta\alpha$ de α sera devenue une fraction insensible de ζ et que, par suite, le rayon de courbure, $\frac{a}{\alpha}$, de la trajectoire retrouvera sa valeur normale R, dès que le parcours Vt aura atteint trois ou quatre longueurs b'.

8. Le changement d'orientation de la bicyclette sur la route, causé par la perturbation, aura été insignifiant pendant que s'effectuait la première rotation ζ du guidon par rapport au cadre, puisque l'instant τ de sa durée est supposé négligeable. Pendant que le guidon revient ensuite à sa première position relative, ce changement d'orientation sur le sol (ou par rapport à l'axe de la route) égale évidemment, par unité du chemin parcouru $\int ds$ ou $\int V\,dt$, le changement même $\frac{\Delta\alpha}{a}$ de la courbure; et il est en tout, très sensiblement,

$$(16) \qquad \int_0^\infty \frac{\Delta\alpha}{a} V\,dt = \frac{V\zeta}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{Vt}{b'}}\,dt = \frac{b'\zeta}{a},$$

quantité inférieure, d'après (14), à la limite très petite $\frac{h'}{V}\varepsilon$. Elle serait encore moindre, si le cavalier se penchait en avant pendant le premier temps, τ, de la manœuvre, pour y rendre b' le plus grand possible, et, d'après (13), réduire ζ; puis, s'il se redressait et se portait, au contraire, un peu en arrière durant la seconde phase, afin de diminuer alors b' et aussi, dans (16), le rapport $\frac{b'}{a}$ ([1]).

D'ailleurs, les déviations *absolues* qu'aura éprouvées en même temps la bicyclette sur le sol, par rapport à sa trajectoire directe ou non troublée, sont évidemment insignifiantes.

En résumé, les petits chocs transversaux tendant au renversement de la machine pourront, à une allure V suffisamment rapide, être corrigés sans dérangement appréciable, grâce à la manœuvre du guidon, qui finira par devenir instinctive chez le cavalier.

9. Des perturbations que l'on aurait négligé de neutraliser au début, et où l'écart $\theta - \frac{V^2}{gR}$ de l'inclinaison θ serait devenu sensible, donneraient lieu à des formules plus compliquées, parce que les quatre termes de l'équation (11) y interviendraient à la fois par des valeurs notablement variables. Je ne m'occuperai pas en détail de ce cas. J'observerai seulement que θ pourra y devenir telle petite fonction de t qu'on voudra, à partir des valeurs initiales, supposées données, tant de cette fonction que de sa dérivée première. Car il suffira que le cavalier choisisse pour α l'intégrale même, formée à partir de l'angle α existant au début, de l'équation différentielle du premier ordre en α que devient la relation (11), quand on y substitue à θ la fonction arbitraire voulue et à $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ sa dérivée seconde.

La condition, à laquelle est astreinte l'inclinaison θ, de ne pas s'éloigner beaucoup de zéro, n'implique donc nullement, pour l'angle α du guidon, une série de valeurs étroitement définie, ou ayant quelque chose de singulier et de peu réalisable. En d'autres termes, une ma-

([1]) Toutefois, ces changements d'attitude devraient peut-être se faire trop vite pour ne pas mettre en défaut nos formules, dont la démonstration suppose que le cavalier se comporte comme un corps rigide fixé au cadre.

nœuvre du guidon suffisante pour éviter les chutes, sur une voie d'une certaine largeur, ne suppose pas, chez le cavalier, une très grande précision des mouvements ou une habileté exceptionnelle; et l'on s'explique aisément que presque tout le monde puisse, avec quelque persévérance, y réussir et s'y habituer, comme à la marche, à la course, au saut, au lancement d'une balle vers un but, etc., bref, aux exercices physiques qui ne sont pas du domaine spécial de l'acrobate.

Les valeurs de α devront, toutefois, ne pas excéder les angles possibles que comporte la bicyclette. Et la trajectoire devra aussi s'orienter vers la direction où l'on veut aller; sans quoi le cavalier n'aurait qu'à s'arrêter, pour repartir dans le sens voulu.

Il évitera, autant que possible, cet inconvénient, si, en faisant acquérir (après passage par zéro), un signe convenable à la dérivée première $\frac{d\theta}{dt}$, il amène assez vite l'inclinaison θ à sa valeur *de régime* $\frac{V^2}{gR}$, et si, au moment d'y réussir, il amortit durant un court instant τ la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ par une manœuvre rapide du guidon. Alors, il est vrai, l'angle α des traces des deux roues présentera généralement un certain écart $\Delta\alpha = \zeta$ d'avec sa valeur normale ou de régime $\frac{a}{R}$. Mais le cavalier pourra faire évanouir graduellement cet écart de la manière qui supprime son influence sur θ, c'est-à-dire qui annule, dans (11), la dérivée seconde $\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Il tâchera donc de donner désormais à la partie variable $\Delta\alpha$ de α la valeur décroissante $\zeta e^{-\frac{Vt}{b}}$, qui l'annihile au bout d'un parcours insignifiant, comme on a vu. Après quoi, θ et α auront ainsi repris leurs valeurs normales.

10. J'ai supposé la perturbation de $\frac{d\theta}{dt}$ causée par un choc, c'est-à-dire par une action (étrangère ou intérieure) assez forte pour créer presque instantanément des vitesses. Si cette action, beaucoup moins vive, n'avait engendré que des accélérations modérées, et si d'ailleurs le cavalier, qui en est averti par les petites déformations et les réactions concomitantes produites dans son corps, s'était trouvé attentif à les neutraliser, l'action du guidon aurait pu, évidemment, être beaucoup

plus douce et plus brève, de manière à altérer bien moins encore la trajectoire.

A quoi il faut ajouter que les réactions du sol ont été censées, pour plus de simplicité, appliquées exclusivement aux points les plus bas K et A des plans médians des deux roues. Or il y a, en réalité, deux petites régions de contact des roues avec le sol, régions comprenant, plus ou moins près de leurs centres, les points respectifs K et A, mais ne s'y réduisant pas. Et l'on sait que les réactions y sont plus énergiques du côté où va la roue, c'est-à-dire du côté où la région commune à la roue et au sol est en train de s'étendre, que du côté opposé où la roue et le sol s'éloignent. Elles prédominent donc en avant du centre de la région commune, ainsi que sur le côté (droit ou gauche) vers lequel est dirigée la vitesse d'inclinaison $\frac{d\theta}{dt}$ du plan médian de la roue. Ces réactions équivalent par suite, pour chaque roue : 1° à des réactions fictives, égales et de mêmes sens, appliquées au point K ou A ; 2° au couple composé de forces précisément égales et contraires à celles-là et des réactions effectives. Ce couple, qui constitue la résistance appelée d'une manière assez impropre *frottement de roulement*, agira quelque peu sur la roue, malgré son petit bras de levier, et, évidemment, en sens contraire de la vitesse angulaire d'inclinaison, surtout quand cette vitesse sera dans le sens même de l'inclinaison θ et que, par suite, le bras de levier du couple aura ses moins petites valeurs (K ou A étant, relativement au centre de la petite région de contact, à l'opposé du côté où se produiront les plus fortes réactions). Le couple tendra donc à annuler la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$, ou à maintenir la bicyclette dans sa position d'équilibre relatif.

Au reste, comme l'a expliqué judicieusement M. Bourlet dans son *Nouveau traité des bicycles et bicyclettes* (*équilibre et direction*) (Paris, Gauthier-Villars, p. 95 et 89), des dispositions, concernant la direction et la place de l'axe autour duquel tourne le plan de la roue directrice, sont prises, dans les machines actuelles : 1° pour que cette roue s'incline, par l'effet tant de son poids que de la pression du sol sur elle, du côté où la bicyclette viendrait à pencher, de manière à remédier automatiquement, en marche rectiligne, à cette inclinaison de la machine ; et aussi, 2° pour que, une fois la situation verticale du cadre

rétablie, le frottement du sol sur la roue directrice, en tirant vers l'arrière le bas de cette roue, la ramène dans le plan du cadre [1].

---

[1] *Remarques complémentaires; essai sur l'explication du virage.*

Mon but n'était pas, comme on voit, d'étudier ce frottement des roues, ni de déterminer les limites de l'inclinaison θ au delà desquelles il devient insuffisant pour empêcher la bicyclette de glisser sur le sol. Je renverrai le lecteur, pour cette question, ainsi que pour le travail et les résistances en jeu dans le mouvement, au *Traité* de M. Bourlet. L'étude des actions intérieures et des réactions du sol ou de l'atmosphère exigerait évidemment l'emploi d'équations du mouvement autres que l'unique relation des moments dont j'ai fait usage. Celle-ci n'a suffi, dans les limites de l'approximation obtenue, que grâce aux deux hypothèses : 1° d'un sol assez rugueux pour s'opposer au glissement des roues tout en permettant leur roulement; 2° d'un cavalier en état de produire à sa volonté les deux mouvements des pédales et du guidon, sans changer notablement ni de forme, ni de position par rapport au cadre de la bicyclette. Les mouvements étendus, plus ou moins vifs, qu'il peut s'imprimer pour modifier la configuration et les inerties actuelles du système, échapperaient donc à notre théorie, ou aux formules (9), (10), (11), qui la résument.

Je n'ai, d'ailleurs, fait intervenir pour le maintien de l'équilibre que la manœuvre du guidon, réduisant l'action des pieds du cavalier à entretenir la vitesse V. Il faudrait sans doute une fonction arbitraire de plus, c'est-à-dire aussi la libre disposition de variations successives à imprimer à la vitesse V, pour pouvoir en même temps modifier à volonté l'orientation de la trajectoire; et encore cela ne suffirait-il pas toujours, comme on verra, ci-après, par l'exemple de l'entrée dans un tournant, où le bicycliste devra directement faire naître, par de passagères mais sensibles déformations de son corps, l'inclinaison positive θ alors indispensable. En tout cas, un cavalier qui serait assez habile dans le jeu des pédales, combiné avec celui du frein, pour produire des changements convenables de vitesse d'un point à l'autre du trajet, tandis que ses mains donnent à l'angle α du guidon les valeurs $\frac{a}{R}$ produisant une suite de courbures voulues $\frac{1}{R}$, tirerait évidemment un grand parti de cette double manœuvre.

Supposé animé, par exemple, d'une certaine vitesse V_0 à son passage par un point où R aurait une valeur R_0 et où s'annuleraient à la fois l'inclinaison θ et la vitesse d'inclinaison $\frac{d\theta}{dt}$, il pourrait maintenir vertical le plan KGA de la bicyclette, et *suivre cependant une trajectoire assignée*, ou dont on donnerait, en fonction de l'arc s parcouru, la suite des courbures $\frac{1}{R}$: il est vrai que ce serait

en enrayant très vite le mouvement, sauf toutefois dans le cas important d'une trajectoire à courbures successives évanouissantes, comme est celle qu'on suit à l'issue des tournants, où le chemin devient rectiligne. Il n'aurait, en effet, qu'à régler désormais le rapport des vitesses V aux rayons de courbure R par la formule

$$(17) \qquad \frac{V}{R} e^{\frac{s}{b'}} = \text{const.}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R_0} e^{-\frac{s}{b'}},$$

qui rend égaux les second et quatrième termes de l'équation (9). Celle-ci se trouve donc réduite à une équation linéaire de second ordre en θ; et son intégrale, vu les conditions initiales supposées, est bien $\theta = 0$.

La formule (17) pourrait évidemment régir la transition, même à vitesse constante, d'un chemin courbe à un chemin droit. Il suffirait d'y prendre

$$V = V_0 \qquad \text{et} \qquad R = R_0 e^{\frac{s}{b'}}.$$

Quant à l'entrée dans un tournant, la double manœuvre des pédales et du guidon ne paraît pas pouvoir y suffire : il y faut de plus un mouvement spontané et d'ensemble du bicycliste sur sa machine. Celui-ci devra s'y porter du côté de la concavité du tournant, pour produire les valeurs positives de $\frac{d\theta}{dt}$ et de θ qui motiveront une rotation du guidon vers le même côté et y dévieront, par suite, la trajectoire. En effet, si le cavalier restait sensiblement immobile sur la selle et que, par suite, *l'équation* (9) *s'appliquât*, le quotient $\frac{V}{R}$, d'abord nul, puis positif, rendrait le second terme de (9) positif lui-même. Mais alors, le quatrième terme $-\frac{V^2}{hR}$ devenant négatif, tandis que le troisième, en θ, d'abord nul lui aussi, serait évidemment négligeable à côté du premier $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, celui-ci ne pourrait qu'être négatif. Donc les valeurs naissantes de $\frac{d\theta}{dt}$ et de θ seraient négatives; et le troisième terme de (9) viendrait bientôt joindre son influence à celles du terme qui le précède et de celui qui le suit, pour accentuer encore dans le même sens négatif, d'après (9), les valeurs du premier terme $\frac{d^2\theta}{dt^2}$. C'est dire que l'inclinaison θ s'exagérerait, jusqu'à rendre imminent le renversement de la bicyclette. Ainsi, un mouvement d'ensemble du cavalier est indispensable.

On sait d'ailleurs, depuis une remarque faite par M. Guyon, qu'un tel mouvement pourra amener, même à vitesse de progression V nulle, une inclinaison θ voulue. Car, dans un système déformable, sans vitesse angulaire initiale autour d'un axe fixe donné, le principe des aires ne s'oppose pas, comme il le ferait

pour un corps rigide, à ce que des actions intérieures, en provoquant des déformations purement temporaires, produisent autour de l'axe un changement effectif ou persistant de l'orientation, dans l'espace, du système, une fois revenu à sa première configuration. C'est en cela même que consiste l'importante remarque de M. Guyou. Sans doute, ici, le retour du système à sa configuration première ne saurait être complet, vu l'existence de produits, brûlés justement par le travail de la déformation dans les nerfs et les muscles du bicycliste, et emportés ailleurs aussitôt après. Mais la faible masse de ces produits, malgré le rôle important de leur énergie dépensée, les rend insignifiants au point de vue des aires décrites, tout comme le sont déjà les échanges gazeux incessants entre l'organisme entier et l'atmosphère ambiante, échanges qui altèrent lentement le système dans son identité de substance.

Il suit de là que, pour l'explication des *virages*, ou changements de direction venant à la suite d'un trajet rectiligne, l'équation (9) ou (10) aurait besoin d'être complétée par un cinquième terme, nécessairement très complexe, formé en ajoutant aux coordonnées i, j, l, qui définissent la situation des éléments dm de la masse du système par rapport au plan médian KGA, des parties i', j', l', fonctions du temps t, et dont la troisième, l' ne serait plus pareille de part et d'autre du plan KGA. On voit que ce cinquième terme dépendrait, comme V et R ou α, d'une sorte de fonction arbitraire, exprimant les mouvements propres plus ou moins étendus du cavalier sur la bicyclette, et mise à sa disposition comme le sont déjà les deux dérivées premières de V et de α. Mais il est clair que cette troisième fonction arbitraire n'entrerait pas dans l'équation d'une manière aussi simple que le font les deux premières, $\frac{dV}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dt}$, et que surtout elle ne représenterait pas une manœuvre aussi facile à préciser que celles des pédales ou du guidon. Pour mieux dire, les deux fonctions arbitraires $\frac{dV}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dt}$ expriment les deux éléments que nous avons réussi à dégager, dans cette troisième fonction, qui comprend encore tout ce qui est resté indistinct et confus dans l'action ou les mouvements propres du cavalier. C'est quand cette action ou ces mouvements propres se réduisent strictement aux manœuvres des pédales et du guidon, que notre équation (9) ou (10) s'applique.

Un résumé du présent Mémoire a paru dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. CXXVII, p. 843 et 895; 28 novembre et 5 décembre 1898).

Lignes correspondantes dans la déformation d'un milieu ; extension des théorèmes sur les tourbillons ;

PAR M. P. APPELL.

1. Imaginons un milieu matériel continu qui subit une déformation finie n'altérant pas sa continuité. Soient a, b, c les coordonnées rectangulaires d'une molécule avant la déformation, x, y, z ses coordonnées après la déformation. Les quantités x, y, z sont évidemment des fonctions de a, b, c,

$$x = f(a, b, c), \qquad y = f_1(a, b, c), \qquad z = f_2(a, b, c);$$

ces fonctions sont uniformes et continues dans l'intérieur de la masse primitive, et, inversement, a, b, c sont des fonctions uniformes et continues de x, y, z dans le milieu déformé ; à chaque point du milieu primitif correspond ainsi un point du milieu déformé, et inversement. Ce mode de déformation se présente dans la théorie de l'élasticité et dans celle du mouvement des fluides, quand on adopte les variables de Lagrange.

Nous nous proposons d'indiquer, sur les familles de courbes qui se correspondent dans les deux milieux, quelques théorèmes comprenant comme cas particuliers les théorèmes classiques relatifs aux lignes de tourbillons. Ces derniers théorèmes apparaissent alors comme des applications de propositions générales relatives aux transformations ponctuelles de l'espace.

2. Soient μ_0 la densité du premier milieu au point a, b, c; μ la densité du deuxième au point correspondant x, y, z; on sait que le déterminant fonctionnel

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

a pour valeur

$$D = \frac{\mu_0}{\mu}.$$

Cette relation, appelée *équation de continuité*, exprime que la masse d'une portion infiniment petite du milieu ne change pas dans la déformation.

3. Considérons, dans le milieu primitif, une famille de lignes courbes dont les équations dépendent de deux paramètres. Soient

$$(L_0) \qquad \frac{da}{A} = \frac{db}{B} = \frac{dc}{C}$$

les équations différentielles de cette famille de courbes, équations obtenues par l'élimination des deux paramètres; dans ces équations A, B, C sont des fonctions déterminées de a, b, c, que nous supposons uniformes. Par la déformation, ces courbes se transforment en une famille de courbes à deux paramètres ayant pour équations différentielles

$$(L) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

X, Y, Z étant des fonctions de x, y, z. Cherchons les relations entre A, B, C et X, Y, Z. Quand le point (a, b, c) subit un déplacement da, db, dc sur L_0, le point (x, y, z) subit, sur L, un déplacement

correspondant

$$(1)\quad \begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial a}da + \dfrac{\partial x}{\partial b}db + \dfrac{\partial x}{\partial c}dc, \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial a}da + \dfrac{\partial y}{\partial b}db + \dfrac{\partial y}{\partial c}dc, \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial a}da + \dfrac{\partial z}{\partial b}db + \dfrac{\partial z}{\partial c}dc. \end{cases}$$

Mais, d'après les relations (L_0) et (L), on a, en désignant par λ_0 et λ des facteurs de proportionnalité

$$da = \lambda_0 A, \qquad db = \lambda_0 B, \qquad dc = \lambda_0 C,$$
$$dx = \lambda X, \qquad dy = \lambda Y, \qquad dz = \lambda Z.$$

Les relations (1) donnent donc

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\lambda_0}X = A\dfrac{\partial x}{\partial a} + B\dfrac{\partial x}{\partial b} + C\dfrac{\partial x}{\partial c}, \\ \dfrac{\lambda}{\lambda_0}Y = A\dfrac{\partial y}{\partial a} + B\dfrac{\partial y}{\partial b} + C\dfrac{\partial y}{\partial c}, \\ \dfrac{\lambda}{\lambda_0}Z = A\dfrac{\partial z}{\partial a} + B\dfrac{\partial z}{\partial b} + C\dfrac{\partial z}{\partial c}. \end{cases}$$

Dans ces relations, le rapport $\frac{\lambda}{\lambda_0}$ est entièrement arbitraire. En effet, on ne change pas les lignes (L_0) en multipliant A, B, C par un même facteur fonction de a, b, c, ni les lignes (L) en multipliant X, Y, Z par un autre facteur.

Nous supposerons, dans ce qui suit, que l'on ait déterminé le rapport de ces facteurs, de telle façon que $\frac{\lambda}{\lambda_0} = D$, D étant le déterminant fonctionnel du n° **2**.

Les relations entre A, B, C et X, Y, Z s'écrivent alors

$$(3)\quad \begin{cases} DX = A\dfrac{\partial x}{\partial a} + B\dfrac{\partial x}{\partial b} + C\dfrac{\partial x}{\partial c}, \\ DY = A\dfrac{\partial y}{\partial a} + B\dfrac{\partial y}{\partial b} + C\dfrac{\partial y}{\partial c}, \\ DZ = A\dfrac{\partial z}{\partial a} + B\dfrac{\partial z}{\partial b} + C\dfrac{\partial z}{\partial c}. \end{cases}$$

Ces formules permettent de passer d'un système de lignes à deux paramètres dans le milieu primitif aux lignes correspondantes, dans le milieu déformé ; elles sont la généralisation des formules établies par Cauchy dans le Mémoire intitulé : *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie* (équations 16, seconde partie), formules qui peuvent servir de point de départ à la théorie des tourbillons [1].

Résolvons les équations (3) par rapport à A, B, C. Pour cela, désignons par

$$\frac{d(yz)}{d(bc)}$$

le mineur

$$\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}$$

du déterminant D par rapport à l'élément $\frac{\partial x}{\partial a}$, et employons une notation analogue pour les autres mineurs. Nous aurons

$$(4)\qquad\left\{\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \mathrm{X}\frac{d(yz)}{d(bc)}+\mathrm{Y}\frac{d(zx)}{d(bc)}+\mathrm{Z}\frac{d(xy)}{d(bc)},\\
\mathrm{B} &= \mathrm{X}\frac{d(yz)}{d(ca)}+\mathrm{Y}\frac{d(zx)}{d(ca)}+\mathrm{Z}\frac{d(xy)}{d(ca)},\\
\mathrm{C} &= \mathrm{X}\frac{d(yz)}{d(ab)}+\mathrm{Y}\frac{d(zx)}{d(ab)}+\mathrm{Z}\frac{d(xy)}{d(ab)}.
\end{aligned}\right.$$

4. *Entre les fonctions* A, B, C *et* X, Y, Z *a lieu la relation invariante*

$$(5)\qquad \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial a}+\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial b}+\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial c}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}\right).$$

En effet, dérivons la première des relations (4) par rapport à a, la deuxième par rapport à b, la troisième par rapport à c, et ajoutons,

[1] *Voyez*, à ce sujet, un article *Sur les équations de l'Hydrodynamique et la théorie des tourbillons*, que nous avons publié dans ce Journal en 1896.

nous aurons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial a}+\frac{\partial B}{\partial b}+\frac{\partial C}{\partial c} &= \frac{\partial X}{\partial a}\frac{d(yz)}{d(bc)}+\frac{\partial X}{\partial b}\frac{d(yz)}{d(ca)}+\frac{\partial X}{\partial c}\frac{d(yz)}{d(ab)} \\ &+\dots\dots\dots\dots \\ &+X\left[\frac{\partial}{\partial a}\frac{d(yz)}{d(bc)}+\frac{\partial}{\partial b}\frac{d(yz)}{d(ca)}+\frac{\partial}{\partial c}\frac{d(y_1 z)}{d(ab)}\right] \\ &+\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

En développant les calculs, on vérifie que le coefficient de X est identiquement nul; il en est de même des coefficients de Y et Z. Quant aux autres termes, on les transforme comme il suit : on a

$$\frac{\partial X}{\partial a}=\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a},$$

$$\frac{\partial X}{\partial b}=\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b},$$

$$\frac{\partial X}{\partial c}=\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c};$$

portant dans l'équation (6), on voit que la première ligne du deuxième membre de cette équation devient

$$\frac{\partial X}{\partial x}D.$$

On transforme de même les autres lignes et l'on a finalement

$$\frac{\partial A}{\partial a}+\frac{\partial B}{\partial b}+\frac{\partial C}{\partial c}=D\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

ce qui, d'après la valeur de D, est la relation (5).

3. Toutes les relations précédentes subsistent évidemment quand on multiplie A, B, C, X, Y, Z par un même facteur ρ fonction de a, b, c. En effet, en remplaçant A, B, C, X, Y, Z par ρA, ρB, ρC, ρX, ρY, ρZ on n'altère pas les relations (3) dont toutes les autres ont été déduites. Mais on peut toujours déterminer ρ de façon que l'on ait identiquement

$$(7)\quad \frac{\partial(\rho A)}{\partial a}+\frac{\partial(\rho B)}{\partial b}+\frac{\partial(\rho C)}{\partial c}=0;$$

il suffit pour cela de prendre pour ρ une solution de l'équation linéaire aux dérivées partielles (7); si les équations des lignes (L_0) sont connues sous forme finie, la recherche de ρ se ramène à une quadrature.

Le facteur ρ étant ainsi déterminé, nous multiplierons A, B, C, X, Y, Z par ρ, et, pour simplifier les notations, nous désignerons encore par A, B, C, X, Y, Z les produits ainsi obtenus.

Les nouvelles fonctions A, B, C, X, Y, Z vérifient alors toutes les relations précédentes, et en outre la relation

$$\frac{\partial A}{\partial a}+\frac{\partial B}{\partial b}+\frac{\partial C}{\partial c}=0. \tag{8}$$

Mais la relation (5) montre que l'on a aussi

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0. \tag{9}$$

Dans tout ce qui suit A, B, C, X, Y, Z désigneront ces nouvelles fonctions.

6. La relation (8) étant satisfaite, on peut toujours trouver trois fonctions p_0, q_0, r_0 de a, b, c vérifiant les relations

$$\left\{\begin{aligned} A &= \frac{\partial r_0}{\partial b}-\frac{\partial q_0}{\partial c},\\ B &= \frac{\partial p_0}{\partial c}-\frac{\partial r_0}{\partial a},\\ C &= \frac{\partial q_0}{\partial a}-\frac{\partial p_0}{\partial b},\end{aligned}\right. \tag{10}$$

comme on le verra, par exemple, dans le premier Volume du *Traité d'Analyse* de M. Picard. De même, la relation (9) étant satisfaite, on peut déterminer trois fonctions p, q, r de x, y, z telles que

$$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{\partial r}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial z},\\ Y &= \frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial x},\\ Z &= \frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}.\end{aligned}\right. \tag{11}$$

7. Nous allons démontrer le théorème suivant : *L'expression*

(12) $$p\,dx + q\,dy + r\,dz - (p_0\,da + q_0\,db + r_0\,dc)$$

est une différentielle totale exacte.

En effet, on a

$$dx = \frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial c}dc,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial b}db + \frac{\partial y}{\partial c}dc,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial a}da + \frac{\partial z}{\partial b}db + \frac{\partial z}{\partial c}dc.$$

L'expression (12) s'écrit alors

(12') $$\left\{\begin{aligned}&\left(p\frac{\partial x}{\partial a} + q\frac{\partial y}{\partial a} + r\frac{\partial z}{\partial a} - p_0\right)da + \left(p\frac{\partial x}{\partial b} + q\frac{\partial y}{\partial b} + r\frac{\partial z}{\partial b} - q_0\right)db\\ &\qquad + \left(p\frac{\partial x}{\partial c} + q\frac{\partial y}{\partial c} + r\frac{\partial z}{\partial c} - r_0\right)dc,\end{aligned}\right.$$

expression de la forme

$$\mathcal{A}\,da + \mathcal{B}\,db + \mathcal{C}\,dc;$$

et les relations telles que (4) signifient, comme on le vérifie facilement,

(13) $$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial b} = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial c}, \qquad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial c} = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial a}, \qquad \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial a} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial b}.$$

Ainsi, en détaillant la première condition

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial b} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial c} = 0,$$

on a

$$\frac{\partial p}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial p}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial q}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial q}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial r}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial r_0}{\partial b} - \frac{\partial q_0}{\partial c}.$$

Si, dans cette équation, en suivant le calcul déjà cité de Cauchy, on

remplace $\frac{\partial p}{\partial b}, \frac{\partial p}{\partial c}, \cdots$ par les expressions suivantes

$$\frac{\partial p}{\partial b} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b},$$

$$\frac{\partial p}{\partial c} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

on voit qu'elle se réduit à la première des relations (4). On vérifie de même que les deux autres conditions (13) sont identiques aux deux autres relations (4).

Ainsi le théorème est démontré, et l'on a identiquement

$$(14)\qquad p\,dx + q\,dy + r\,dz - (p_0\,da + q_0\,db + r_0\,dc) = d\mathrm{F}(a, b, c),$$

F étant une fonction de a, b, c.

Réciproquement, prenons trois fonctions p_0, q_0, r_0 de a, b, c et trois fonctions p, q, r de x, y, z de telle façon que l'expression (12) soit une différentielle exacte en vertu des formules déterminant x, y, z en fonction de a, b, c; calculons ensuite les fonctions A, B, C, X, Y, Z par les relations (10) et (11); les lignes

$$\frac{da}{\mathrm{A}} = \frac{db}{\mathrm{B}} = \frac{dc}{\mathrm{C}}$$

et

$$\frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dy}{\mathrm{Y}} = \frac{dz}{\mathrm{Z}}$$

sont correspondantes, A, B, C, X, Y, Z remplissant toutes les conditions indiquées.

Les conséquences de la formule (14) sont identiques à celles que l'on rencontre dans la théorie des tourbillons. Nous les indiquerons sommairement.

8. Soient (C_0) une courbe fermée prise dans le milieu initial et (C) la courbe fermée suivant laquelle sont disposées après la défor-

mation les molécules qui étaient primitivement sur (C_0). On a

$$(15)\quad \int_{(C)} (p\,dx + q\,dy + r\,dz) = \int_{(C_0)} (p_0\,da + q_0\,db + r_0\,dc),$$

la première intégrale étant prise le long de (C) et la deuxième le long de (C_0).

En effet, d'après l'identité (14), la différence des deux intégrales (15) est

$$\int_{(C_0)} dF(a, b, c),$$

c'est-à-dire o, puisque la courbe (C_0) est fermée.

Imaginons une surface S_0 simplement connexe ayant (C_0) comme contour, et de même une surface S ayant (C) comme contour. D'après le théorème d'Ampère et de Stokes, on a

$$\int_{(C_0)} (p_0\,da + q_0\,db + r_0\,dc) = \int\int_{S_0} (A\alpha + B\beta + C\gamma)\,d\sigma_0,$$

où l'intégrale double est étendue à l'aire de S_0, $d\sigma_0$ désignant un élément de cette aire, et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à cet élément. (*Voir* le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. I.)

Soit H_0 le vecteur ayant pour origine le point a, b, c et pour projections les valeurs de A, B, C en ce point. La quantité

$$A\alpha + B\beta + C\gamma$$

est la projection de H_0 sur la normale : nous la désignerons par $(H_0)_n$: l'intégrale ci-dessus est alors

$$\int\int_{S_0} (H_0)_n\,d\sigma_0.$$

De même, on a

$$\int_{(C)} (p\,dx + q\,dy + r\,dz) = \int\int_{S} (X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\,d\sigma,$$

intégrale qu'on peut écrire

$$\int\!\!\int_{S} H_n d\sigma,$$

en appelant H_n la projection du vecteur H de composantes X, Y, Z sur la normale à $d\sigma$.

La relation (15) peut donc s'écrire

$$\int\!\!\int_{S_0} (H_0)_n d\sigma_0 = \int\!\!\int_{S} H_n d\sigma.$$

Sous cette forme, elle a une signification simple. En regardant H_0 et H comme des forces et employant une locution connue, on peut dire que

$$(H_0)_n d\sigma_0$$

est le flux de force à travers l'élément $d\sigma_0$ et que

$$H_n d\sigma$$

est le flux à travers $d\sigma$. La relation signifie que le flux de force total à travers S_0 est égal au flux total à travers S.

9. Le point de départ de cette étude est la considération d'un système de lignes L_0, à deux paramètres, tracées dans le milieu primitif. Nous appellerons *surface* L_0 une surface engendrée par une suite continue de lignes L_0. Par la déformation, les lignes L_0 se changent en lignes L et la *surface* L_0 en une *surface* L. Cela posé, si l'on trace sur la surface L_0 une courbe fermée (C_0) limitant, sur cette surface, une aire simplement connexe, la courbe correspondante (C) sera située sur la surface correspondante L. Dans ce cas, *la valeur commune des deux intégrales* (15) *est nulle.*

En effet, d'après le théorème d'Ampère et de Stokes appliqué à la portion de surface L_0 limitée par la courbe (C_0), on a

$$\int_{C_0} (p_0 da + q_0 db + r_0 dc) = \int\!\!\int (H_0)_n d\sigma_0,$$

l'intégrale double étant étendue à la portion de surface L_0 considérée.

Mais en chaque point a, b, c de la surface L_0 le vecteur H_0 de projections A, B, C est tangent à cette surface, d'après la définition même des lignes L_0. On a donc identiquement $(H_0)_n = 0$, et l'intégrale considérée est nulle.

10. Associons des lignes L_0 de façon à former une surface tubulaire que nous appellerons *tube* L_0. Par la déformation, ce tube se change en un *tube* L. On démontre, comme dans la théorie des tourbillons [1], les propositions suivantes :

Soit une courbe fermée quelconque (C_0) *située sur le tube* L_0 *et l'entourant une fois; l'intégrale*

$$\int_{(C_0)} (p_0\,da + q_0\,db + r_0\,dc)$$

a, tout le long du tube L_0, *la même valeur, quelle que soit la courbe* C_0.

Cette valeur est égale à celle de l'intégrale

$$\int_{(C)} (p\,dx + q\,dy + r\,dz)$$

prise le long d'une courbe fermée quelconque située sur le tube L *et l'entourant une fois.*

11. Voici encore une relation de forme invariante. Nous avons vu que l'expression (12′) du n° **7** est la différentielle totale d'une certaine fonction F de a, b, c. On peut donc écrire

$$p_0 + \frac{\partial F}{\partial a} = p\frac{\partial x}{\partial a} + q\frac{\partial y}{\partial a} + r\frac{\partial z}{\partial a},$$

$$q_0 + \frac{\partial F}{\partial b} = p\frac{\partial x}{\partial b} + q\frac{\partial y}{\partial b} + r\frac{\partial z}{\partial b},$$

$$r_0 + \frac{\partial F}{\partial c} = p\frac{\partial x}{\partial c} + q\frac{\partial y}{\partial c} + r\frac{\partial z}{\partial c}.$$

---

(1) Poincaré, *Leçons sur la théorie des tourbillons*; Carré, 1893.
V. Bjerknes, *Ueber die Bildung von Cirkulations bewegungen und Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten*, bei Jacob Dybwad, Christiana; 1898.

D'autre part, les quantités A, B, C sont données en fonction de X, Y, Z par les relations (4). Si l'on forme la combinaison

$$\left(p_0 + \frac{\partial F}{\partial a}\right) A + \left(q_0 + \frac{\partial F}{\partial b}\right) B + \left(r_0 + \frac{\partial F}{\partial c}\right) C,$$

on voit immédiatement qu'elle est égale à

$$D(pX + qY + rZ).$$

Donc, comme $\mu D = \mu_0$,

$$\frac{1}{\mu_0}(p_0 A + q_0 B + r_0 C) + \frac{1}{\mu_0}\left(A\frac{\partial F}{\partial a} + B\frac{\partial F}{\partial b} + C\frac{\partial F}{\partial c}\right) = \frac{1}{\mu}(pX + qY + rZ).$$

Les fonctions p_0, q_0, r_0 ont été assujetties uniquement à vérifier les relations (10); or ces relations restent vérifiées quand on y remplace p_0, q_0, r_0 par

$$p_0 + \frac{\partial F}{\partial a}, \quad q_0 + \frac{\partial F}{\partial b}, \quad r_0 + \frac{\partial F}{\partial c},$$

car les termes provenant de F disparaissent. Si nous appelons encore p_0, q_0, r_0 ces nouvelles fonctions $p_0 + \frac{\partial F}{\partial a}$, $\cdots$, la relation ci-dessus prend la forme plus simple

$$\frac{1}{\mu_0}(p_0 A + q_0 B + r_0 C) = \frac{1}{\mu}(pX + qY + rZ).$$

12. Nous terminerons par une remarque sur ce qu'on peut appeler la *composition des systèmes de lignes correspondantes.*

Soit une famille de lignes à deux paramètres

$$(L'_0) \qquad \frac{da}{A'} = \frac{db}{B'} = \frac{dc}{C'},$$

où A′, B′, C′ sont des fonctions de a, b, c vérifiant la condition

$$\frac{\partial A'}{\partial a} + \frac{\partial B'}{\partial b} + \frac{\partial C'}{\partial c} = 0$$

et

$$(\mathrm{L}') \qquad \frac{dx}{\mathrm{X}'} = \frac{dy}{\mathrm{Y}'} = \frac{dz}{\mathrm{Z}'}$$

les lignes correspondantes dans le milieu déformé, définies par les relations (3).

Soient, de même,

$$(\mathrm{L}''_0) \qquad \frac{da}{\mathrm{A}''} = \frac{db}{\mathrm{B}''} = \frac{dc}{\mathrm{C}''},$$

$$(\mathrm{L}'') \qquad \frac{dx}{\mathrm{X}''} = \frac{dy}{\mathrm{Y}''} = \frac{dz}{\mathrm{Z}''}$$

deux autres systèmes de lignes correspondantes avec

$$\frac{\partial \mathrm{A}''}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{B}''}{\partial b} + \frac{\partial \mathrm{C}''}{\partial c} = 0.$$

Les deux systèmes de lignes

$$(\mathrm{L}_0) \qquad \frac{da}{\mathrm{A}' + k\mathrm{A}''} = \frac{db}{\mathrm{B}' + k\mathrm{B}''} = \frac{dc}{\mathrm{C}' + k\mathrm{C}''},$$

$$(\mathrm{L}) \qquad \frac{dx}{\mathrm{X}' + k\mathrm{X}''} = \frac{dy}{\mathrm{Y}' + k\mathrm{Y}''} = \frac{dz}{\mathrm{Z}' + k\mathrm{Z}''},$$

où k est une constante, sont encore *correspondants*. Cela résulte de ce que les relations (3), qui expriment que deux systèmes de lignes se correspondent, sont linéaires et homogènes en A, B, C, X, Y, Z.

Si l'on détermine les fonctions

$$p'_0, \quad q'_0, \quad r'_0, \quad p', \quad q', \quad r',$$
$$p''_0, \quad q''_0, \quad r''_0, \quad p'', \quad q'', \quad r'',$$

relatives aux deux systèmes de lignes correspondantes, on peut prendre pour les fonctions analogues relatives au système résultant L_0 et L,

$$p'_0 + kp''_0, \quad q'_0 + kq''_0, \quad r'_0 + kr''_0,$$
$$p' + kp'', \quad q' + kq'', \quad r' + kr''.$$

13. Dans la théorie des tourbillons, les fonctions A, B, C et X, Y, Z sont les projections du vecteur tourbillon ξ_0, η_0, ζ_0 et ξ, η, ζ aux instants t_0 et t. Les fonctions p_0, q_0, r_0 et p, q, r sont alors les projections de la vitesse d'une molécule u_0, v_0, w_0 et u, v, w aux mêmes instants.

14. Un autre exemple se rencontre dans le mouvement *permanent* d'un fluide. Dans ce cas les trajectoires des molécules se conservent : elles se confondent avec les lignes de courant. On sait que l'on appelle *lignes de courant* un système de lignes telles que la tangente en chacun de leurs points coïncide avec la vitesse de la molécule fluide placée en ce point. En général, ces lignes changent avec le temps; mais, si le mouvement est *permanent*, comme nous le supposons, les lignes de courant sont les mêmes à l'instant t_0 et à l'instant t.

Appelons a, b, c les coordonnées d'une molécule à l'instant t_0 ; u_0, v_0, w_0 les projections de sa vitesse; appelons x, y, z les coordonnées de la même molécule au temps t; u, v, w les projections de sa vitesse. On a

$$x = f(a, b, c, t),$$
$$y = f_1(a, b, c, t),$$
$$z = f_2(a, b, c, t).$$

Les lignes de courant à l'instant t_0 sont définies par les relations

$$(l_0) \qquad \frac{da}{u_0} = \frac{db}{v_0} = \frac{dc}{w_0},$$

et à l'instant t par

$$(l) \qquad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

Ces lignes correspondantes l et l_0 sont actuellement *identiques*. En effet, le mouvement étant permanent, u_0, v_0, w_0 sont exprimés en a, b, c de la même façon que u, v, w en x, y, z : on peut dire aussi que les molécules qui, à l'instant t_0, se trouvent sur une ligne de courant l_0 suivent cette ligne dans leur mouvement, et, à l'instant t, se trouvent

sur la même ligne; la ligne l correspondant à l_0 se confond donc avec l_0.

Il est aisé de vérifier directement que les quantités u_0, v_0, w_0 et u, v, w satisfont à des relations telles que (2).

Suivons, en effet, une molécule dans son mouvement. A l'instant t_0 cette molécule est dans la position $M_0(a, b, c)$ avec la vitesse u_0, v_0, w_0: elle suit ensuite une trajectoire l_0 et au temps t elle est dans une position $M(x, y, z)$ avec la vitesse u, v, w : entre a, b, c, x, y, z, t ont lieu les relations

$$x = f(a, b, c, t),$$
$$y = f_1(a, b, c, t),$$
$$z = f_2(a, b, c, t).$$

Soit une deuxième molécule M'_0 située, à l'instant t_0, sur la même trajectoire l_0 infiniment près de M_0; soient $(a + da, b + db, c + dc)$ les coordonnées de M'_0; à l'instant t cette molécule occupe, sur la même trajectoire l_0, une position $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ infiniment voisine de M.

On a, entre dx, dy, dz et da, db, dc, les relations évidentes

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial a}\,da + \frac{\partial x}{\partial b}\,db + \frac{\partial x}{\partial c}\,dc,\\ dy &= \frac{\partial y}{\partial a}\,da + \frac{\partial y}{\partial b}\,db + \frac{\partial y}{\partial c}\,dc,\\ dz &= \frac{\partial z}{\partial a}\,da + \frac{\partial z}{\partial b}\,db + \frac{\partial z}{\partial c}\,dc.\end{aligned}\right.$$

Mais, le mouvement étant permanent, on peut aussi regarder M'_0 comme la position de la molécule à l'instant $t_0 + \delta t$, et M' comme la position de M à l'instant $t + \delta t$: on a donc

$$da = u_0\,\delta t, \qquad db = v_0\,\delta t, \qquad dc = w_0\,\delta t$$

car la molécule M_0 a pour vitesse (u_0, v_0, w_0); et, de même,

$$dx = u\,\delta t, \qquad dy = v\,\delta t, \qquad dz = w\,\delta t.$$

Les relations (16) deviennent alors

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} u &= u_0\frac{\partial x}{\partial a}+v_0\frac{\partial x}{\partial b}+w_0\frac{\partial x}{\partial c},\\ v &= u_0\frac{\partial y}{\partial a}+v_0\frac{\partial y}{\partial b}+w_0\frac{\partial y}{\partial c},\\ w &= u_0\frac{\partial z}{\partial a}+v_0\frac{\partial z}{\partial b}+w_0\frac{\partial z}{\partial c}.\end{aligned}\right.$$

Ces relations sont de la forme prévue (2). Pour les ramener à la forme (3), partons de l'équation du n° **2**,

$$D\mu = \mu_0;$$

puis multiplions les relations (17) à gauche par $D\mu$ et à droite par μ_0: nous avons

$$\begin{aligned} D.\mu u &= \mu_0 u_0\frac{\partial x}{\partial a}+\mu_0 v_0\frac{\partial x}{\partial b}+\mu_0 w_0\frac{\partial x}{\partial c},\\ D.\mu v &= \mu_0 u_0\frac{\partial y}{\partial a}+\mu_0 v_0\frac{\partial y}{\partial b}+\mu_0 w_0\frac{\partial y}{\partial c},\\ D.\mu w &= \mu_0 u_0\frac{\partial z}{\partial a}+\mu_0 v_0\frac{\partial z}{\partial b}+\mu_0 w_0\frac{\partial z}{\partial c}.\end{aligned}$$

Ces relations sont bien de la forme (3), où

$$A = \mu_0 u_0,\qquad B = \mu_0 v_0,\qquad C = \mu_0 w_0,$$
$$X = \mu u,\qquad Y = \mu v,\qquad Z = \mu w.$$

En outre, l'équation de continuité, dans le cas du mouvement permanent, donne

$$\frac{\partial A}{\partial a}+\frac{\partial B}{\partial b}+\frac{\partial C}{\partial c}=0,$$
$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0.$$

On pourrait donc appliquer les théorèmes généraux aux trajectoires; mais actuellement ces théorèmes sont intuitifs, car ils se

réduisent, au fond, à ce fait que le débit à travers une section quelconque d'un filet fluide est invariable.

15. Dans un mouvement permanent, les lignes de tourbillons et les lignes de courant se conservent. On peut donc, d'après le principe de la composition (n° **12**), appliquer les théorèmes précédents aux lignes résultant de la composition des lignes de tourbillons et des lignes de courant.

Nouvelles expressions des éléments d'un système orthogonal par les fonctions sigma d'un seul argument et leur application à la rotation de corps solides liés l'un à l'autre;

PAR M. E. JAHNKE.

Dans un Mémoire, couronné par l'Académie des Sciences, M[me] de Kowalevsky a ramené aux quadratures un nouveau cas important du problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe. Dès lors, l'attention des géomètres les plus distingués s'est dirigée vers d'autres cas du même problème.

M[me] de Kowalevsky a réussi à exprimer, au moyen des fonctions hyperelliptiques de deux arguments, les trois composantes de la vitesse de rotation suivant les axes rectangulaires fixes, et trois des neuf cosinus directeurs. Cependant, à cause des difficultés du calcul, elle s'est dispensée de représenter les six autres cosinus et les trois composantes de rotation suivant les axes mobiles. C'est M. F. Kötter qui a comblé les lacunes laissées par M[me] de Kowalevsky.

De plus, M. A. Wangerin et, quelques années plus tard, M. V. Volterra ont traité un cas très intéressant et important de la rotation de corps solides liés l'un à l'autre. M. Wangerin a montré que ce cas se ramène aux quadratures, et M. Volterra a représenté, au moyen des fonctions sigma de Weierstrass, les trois composantes de rotation suivant les axes mobiles, et trois des neuf cosinus directeurs, mais les expressions *définitives* des six autres cosinus directeurs et

des trois composantes de rotation suivant les axes fixes manquent encore.

Dans ce Mémoire je m'occupe du même problème pour en donner la solution *complète*. En même temps je ferai voir qu'on peut obtenir tous les éléments dudit problème d'un seul coup et presque sans aucun calcul, de sorte que la solution en paraît être réduite à un haut degré de simplicité et d'élégance.

Dans ce but, j'ai adopté une méthode toute différente de celle qu'ont employée Mme de Kowalevsky et MM. F. Kötter, A. Wangerin, V. Volterra, W. Stekloff, A. Ljapunoff et R. Liouville. Ces géomètres ont pris pour point de départ les principes de la Mécanique afin d'en déduire les équations différentielles, et en ont cherché les intégrales par des raisonnements ingénieux. La nouvelle méthode, due à M. F. Caspary, sépare nettement la partie analytique de la solution de celle qui appartient à la Mécanique, et elle est fondée sur un théorème analytique très général découvert par M. F. Caspary. Ce théorème lie les neuf cosinus a_{mn} d'un système orthogonal et les six quantités

$$\begin{aligned} p_h &= -(a_{1k}da_{1l} + a_{2k}da_{2l} + a_{3k}da_{3l}) \\ r_h &= \quad a_{k1}da_{l1} + a_{k2}da_{l2} + a_{k3}da_{l3} \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} h, k, l = 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \\ 3, 1, 2 \end{aligned} \right),$$

que M. F. Caspary a appelé les quinze *éléments* d'un système orthogonal, aux fonctions thêta d'un nombre quelconque d'arguments. Les expressions des *éléments* d'un système orthogonal par les fonctions thêta se déduisent d'identités algébriques au moyen des transformations du second degré. Elles satisfont à certaines équations, tantôt algébriques, tantôt différentielles. Les unes se présentent dans les problèmes de la Mécanique dont on cherche les intégrales, tandis que les autres fournissent les relations algébriques par lesquelles ces intégrales sont liées entre elles; les unes et les autres renferment encore des arguments et des fonctions quelconques qui se déterminent par les données de la question proposée.

Pour illustrer sa méthode, M. F. Caspary en a donné deux applications : l'une relative au problème de la rotation d'un corps solide, où il retrouve les résultats dus à Jacobi, Lottner, Dumas, Hal-

phen et à MM. Hermite, Darboux et Hess; l'autre relative au mouvement d'un corps solide dans un liquide, où il obtient les résultats de M. H. Weber.

En adoptant cette méthode féconde, j'en ai donné d'autres applications. On sait que M. F. Kötter a établi un système orthogonal dont découlent les solutions de divers problèmes de la Mécanique. Ce géomètre exprime, au moyen des fonctions thêta de deux arguments, les neuf cosinus directeurs et les trois composantes de rotation suivant les axes fixes. Il manque seulement les expressions *définitives* des trois composantes de rotation suivant les axes du système mobile. J'ai déduit tous les *éléments* de ce système orthogonal, dans un Mémoire inséré au Tome CXIX du *Journal* de M. L. Fuchs et dont cet illustre géomètre a bien voulu présenter un résumé à l'Académie des Sciences de Berlin.

En poursuivant ces recherches, j'ai été conduit à généraliser la notion usuelle de composition en composant un système orthogonal (A) avec *quatre* systèmes orthogonaux ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{C}$), (E), dont les deux ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$) sont *adjoints* au système ($\mathfrak{C}$). Ce nouveau système, que j'ai eu l'honneur de communiquer récemment à l'Académie, joue un rôle important dans l'étude des problèmes de Dynamique. En effet, c'est de ce résultat que découle, comme conséquence immédiate, une généralisation de ce célèbre théorème de Jacobi qui permet de décomposer le mouvement d'un corps grave de révolution, suspendu par un point de son axe, en deux mouvements à la Poinsot. De l'autre côté, si on laisse le système (E) quelconque et que l'on exprime les éléments des trois autres systèmes ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{C}$) par les fonctions thêta de deux arguments, on retrouve le système découvert par M. F. Kötter. En supposant, au contraire, les coefficients du système ($\mathfrak{C}$) et, par conséquent, des systèmes ($\mathfrak{A}$) et ($\mathfrak{B}$) constants, et en représentant les éléments du système (E) par les fonctions thêta, on obtient de nouveaux systèmes orthogonaux qui renferment les solutions de nouveaux problèmes de Dynamique. Particulièrement, en introduisant les fonctions sigma de Weierstrass, on parvient à résoudre le problème de la rotation de corps solides liés l'un à l'autre, dans le cas traité par MM. Wangerin et Volterra.

Le présent Mémoire se divise en deux parties, partie analytique et partie dynamique.

Dans la partie analytique, j'exprime identiquement les quinze *éléments* d'un système orthogonal par les *éléments* de quatre systèmes orthogonaux, et je déduis de ces identités, au moyen des résultats dus à M. F. Caspary, le théorème I qui lie d'une façon nouvelle les *éléments* d'un système orthogonal aux fonctions sigma (n° **1**).

Puis j'en tire les relations caractéristiques et les équations différentielles de premier ordre qui existent entre les *éléments* de ce système orthogonal. En introduisant une fonction quadratique T qui s'exprime dans deux formes différentes, je réduis, dans le théorème II, les équations différentielles à une forme très simple qui se présente, d'ailleurs, dans une classe très étendue de problèmes de Mécanique (n° **2**).

Le théorème III donne les relations qui lient les intégrales de ces équations différentielles (n° **3**).

Il est évident qu'il existe encore bien d'autres équations différentielles. Je signale parmi elles les équations aux dérivées partielles ayant la forme de celles qui se présentent aussi dans la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe et dans le mouvement d'un corps solide dans un liquide (n° **4**).

Dans la partie dynamique, les deux formes que j'ai données à la fonction T me conduisent à soumettre les coefficients qui entrent dans les expressions du théorème I à deux systèmes différents de conditions. Ainsi j'arrive aux deux formes des équations différentielles appartenant au problème mentionné ci-dessus de trouver le mouvement de n corps solides pesants dont l'un tourne autour de son centre de gravité et les autres $n-1$ corps de révolution autour d'axes fixés au premier corps. De plus, lesdites équations de condition donnent naissance à deux expressions différentes de la force vive T qui sont identiques à celles que l'on doit à MM. Wangerin et Volterra (n° **6**).

Afin que les expressions établies dans le théorème I fournissent, comme cas spécial, la solution *complète* dudit problème de rotation, je détermine encore par les données des équations différentielles les quantités quelconques qui y entrent (n° **7**).

Toutes les formules que j'ai données dans les théorèmes I, II, III

peuvent être généralisées de façon à obtenir la solution d'un problème de rotation plus général (nos 5, 8).

PREMIÈRE PARTIE.

1. *Théorème relatif aux fonctions sigma.* — Soient $\mathfrak{c}_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4)$ les coefficients du système orthogonal $(\mathfrak{C})$ liés entre eux par les relations

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{c}_{i1}\mathfrak{c}_{j1} + \mathfrak{c}_{i2}\mathfrak{c}_{j2} + \mathfrak{c}_{i3}\mathfrak{c}_{j3} + \mathfrak{c}_{i4}\mathfrak{c}_{j4} &= 0 \\ \mathfrak{c}_{1i}\mathfrak{c}_{1j} + \mathfrak{c}_{2i}\mathfrak{c}_{2j} + \mathfrak{c}_{3i}\mathfrak{c}_{3j} + \mathfrak{c}_{4i}\mathfrak{c}_{4j} &= 0 \\ \mathfrak{c}_{i1}^2 + \mathfrak{c}_{i2}^2 + \mathfrak{c}_{i3}^2 + \mathfrak{c}_{i4}^2 &= \mathfrak{C} \\ \mathfrak{c}_{1i}^2 + \mathfrak{c}_{2i}^2 + \mathfrak{c}_{3i}^2 + \mathfrak{c}_{4i}^2 &= \mathfrak{C} \end{aligned}\right\} (i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3, 4).$$

et $\mathfrak{a}_{mn}$, $\mathfrak{b}_{mn}(m \neq n;\ m, n = 1, 2, 3)$ ceux des systèmes orthogonaux $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, liés entre eux par les relations analogues.

Désignons par

$$\mathfrak{c}_{ij}^{rs} = \mathfrak{c}_{ri}\mathfrak{c}_{sj} - \mathfrak{c}_{rj}\mathfrak{c}_{si}$$

les mineurs de deuxième ordre du déterminant $|\mathfrak{c}_{ij}|$ et posons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{C}\mathfrak{a}_{1h} &= \mathfrak{c}_{h4}^{14} - \mathfrak{c}_{h4}^{23}, & \mathfrak{C}\mathfrak{b}_{1h} &= \mathfrak{c}_{h4}^{14} + \mathfrak{c}_{h4}^{23} \\ \mathfrak{C}\mathfrak{a}_{2h} &= \mathfrak{c}_{h4}^{24} - \mathfrak{c}_{h4}^{31}, & \mathfrak{C}\mathfrak{b}_{2h} &= \mathfrak{c}_{h4}^{24} + \mathfrak{c}_{h4}^{31} \\ \mathfrak{C}\mathfrak{a}_{3h} &= \mathfrak{c}_{h4}^{34} - \mathfrak{c}_{h4}^{12}, & \mathfrak{C}\mathfrak{b}_{3h} &= \mathfrak{c}_{h4}^{34} + \mathfrak{c}_{h4}^{12} \end{aligned}\right\} \quad (h = 1, 2, 3).$$

J'ai appelé les systèmes $(\mathfrak{A})$ et $(\mathfrak{B})$ *adjoints* au système $(\mathfrak{C})$ [1].

---

[1] Dans le Mémoire *Ueber einen Zusammenhang zwischen den Elementen orthogonaler Neuner-und Sechzehnersysteme* (*Journal für die reine und angew. Math.*, t. CXVIII, p. 225, 230).

Soient, de plus, $e_{mn}(m \neq n; m, n = 1, 2, 3)$,

$$\begin{aligned} p_h(e) &= -(e_{1k}de_{1l} + e_{2k}de_{2l} + e_{3k}de_{3l}) \\ v_h(e) &= \quad e_{k1}de_{l1} + e_{k2}de_{l2} + e_{k3}de_{l3} \end{aligned} \quad \left(h, k, l = \begin{matrix} 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \\ 3, 1, 2 \end{matrix} \right)$$

les quinze *éléments* du système orthogonal (E).

D'après un théorème que j'ai établi antérieurement (*Comptes rendus*, t. CXXVI, p. 1013-1016; *voir* aussi le *Journal* de M. L. Fuchs, t. CXIX, p. 240), un nouveau système orthogonal (A) peut être composé des quatre systèmes orthogonaux ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{C}$), (E), dont les deux, ($\mathfrak{A}$) et ($\mathfrak{B}$), sont *adjoints* au système ($\mathfrak{C}$). En supposant les coefficients $\mathfrak{c}_{ij}$ et, par conséquent, les coefficients $\mathfrak{a}_{mn}$ et $\mathfrak{b}_{mn}$ constants, les *éléments* du nouveau système orthogonal s'obtiennent de la manière suivante :

$$(\mathrm{A}) \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}(a_{1h} + ia_{2h}) &= \mathrm{E}\mathfrak{A}[(e_{11} + ie_{21})\mathfrak{a}_{h1} + (e_{12} + ie_{22})\mathfrak{a}_{h2} + (e_{13} + ie_{23})\mathfrak{a}_{h3}], \\ \mathrm{A}(a_{1h} - ia_{2h}) &= \mathrm{E}\mathfrak{B}[(e_{11} - ie_{21})\mathfrak{b}_{h1} + (e_{12} - ie_{22})\mathfrak{b}_{h2} + (e_{13} - ie_{23})\mathfrak{b}_{h3}], \\ \mathrm{A}a_{3h} &= \mathrm{E}(e_{31}\mathfrak{c}_{h1} + e_{32}\mathfrak{c}_{h2} + e_{33}\mathfrak{c}_{h3} - i\mathfrak{c}_{h4}), \\ \mathrm{A} &= i\mathrm{E}(e_{31}\mathfrak{c}_{41} + e_{32}\mathfrak{c}_{42} + e_{33}\mathfrak{c}_{43} - i\mathfrak{c}_{44}); \\ \mathrm{A}p_h &= \mathrm{E}[p_1(e)\mathfrak{c}_{h1} + p_2(e)\mathfrak{c}_{h2} + p_3(e)\mathfrak{c}_{h3} - iv_3(e)\mathfrak{c}_{h4}], \\ \mathrm{A}v_3 &= i\mathrm{E}[p_1(e)\mathfrak{c}_{41} + p_2(e)\mathfrak{c}_{42} + p_3(e)\mathfrak{c}_{43} - iv_3(e)\mathfrak{c}_{44}], \\ \mathrm{A}(v_1 + iv_2) &= \mathrm{E}\mathfrak{A}[v_1(e) + iv_2(e)], \\ \mathrm{A}(v_1 - iv_2) &= \mathrm{E}\mathfrak{B}[v_1(e) - iv_2(e)], \end{aligned} \right.$$

où

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

et les facteurs E, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ relatifs aux coefficients e_{mn}, $\mathfrak{a}_{mn}$, $\mathfrak{b}_{mn}$ jouent le même rôle que le facteur A relatif aux coefficients a_{mn}.

Or, M. F. Caspary [1] a représenté les quinze *éléments* d'un système orthogonal par les fonctions sigma de Weierstrass. Si l'on rem-

---

[1] *Journ. de Math.*, 4e série, t. VI, p. 376. C'est M. Caspary qui a établi le premier lesdites expressions en représentant les quinze *éléments* au moyen de quatre paramètres quelconques.

place les *éléments* du système orthogonal (E) par ces expressions, on obtient le théorème :

I. *Soient* u *et* v *deux arguments quelconques; soient* G *une fonction quelconque et* $i = \sqrt{-1}$. *Soient* $\mathfrak{c}_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4)$ *les seize coefficients constants d'un système orthogonal et* $\mathfrak{a}_{mn}$ *et* $\mathfrak{b}_{mn}(m, n = 1, 2, 3)$ *respectivement les neuf coefficients des systèmes* adjoints. *Alors les fonctions sigma de Weierstrass sont liées aux éléments d'un système orthogonal de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}
A(a_{1h} + ia_{2h}) &= -\ G\mathfrak{A}\,[\varepsilon_1\mathfrak{a}_{h1}\sigma_1(u+v) + \varepsilon_2\mathfrak{a}_{h2}\sigma_2(u+v) + \varepsilon_3\mathfrak{a}_{h3}\sigma_3(u+v)],\\
A(a_{1h} - ia_{2h}) &= -G^{-1}\mathfrak{B}[\varepsilon_1\mathfrak{b}_{h1}\sigma_1(u-v) + \varepsilon_2\mathfrak{b}_{h2}\sigma_2(u-v) + \varepsilon_3\mathfrak{b}_{h3}\sigma_3(u-v)],\\
Aa_{3h} &= \ i(\varepsilon_1\mathfrak{c}_{h1}\sigma_1 u\sigma_1 v + \varepsilon_2\mathfrak{c}_{h2}\sigma_2 u\sigma_2 v + \varepsilon_3\mathfrak{c}_{h3}\sigma_3 u\sigma_3 v - \mathfrak{c}_{h4}\sigma u\sigma v),\\
A &= -(\varepsilon_1\mathfrak{c}_{41}\sigma_1 u\sigma_1 v + \varepsilon_2\mathfrak{c}_{42}\sigma_2 u\sigma_2 v + \varepsilon_3\mathfrak{c}_{43}\sigma_3 u\sigma_3 v - \mathfrak{c}_{44}\sigma u\sigma v);\\
Ap_h &= \ \varepsilon_1 m_1\mathfrak{c}_{h1}\sigma_1 u\sigma_1 v + \varepsilon_2 m_2\mathfrak{c}_{h2}\sigma_2 u\sigma_2 v + \varepsilon_3 m_3\mathfrak{c}_{h3}\sigma_3 u\sigma_3 v - m_0\mathfrak{c}_{h4}\sigma u\sigma v,\\
Ar_3 &= i[\varepsilon_1 m_1\mathfrak{c}_{41}\sigma_1 u\sigma_1 v + \varepsilon_2 m_2\mathfrak{c}_{42}\sigma_2 u\sigma_2 v + \varepsilon_3 m_3\mathfrak{c}_{43}\sigma_3 u\sigma_3 v - m_0\mathfrak{c}_{44}\sigma u\sigma v],\\
A(r_1 + ir_2) &= \ G\mathfrak{A}\sigma(u+v)\,d(u+v),\\
A(r_1 - ir_2) &= G^{-1}\mathfrak{B}\sigma(u-v)\,d(u-v)\\
&\qquad (h = 1, 2, 3),
\end{aligned}$$

où

$$m_s = \frac{\sigma_s' v}{\sigma_s v}du + \frac{\sigma_s' u}{\sigma_s u}dv + d\log G \qquad (s = 0, 1, 2, 3),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{e_1 - e_2}}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_2 - e_3}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}\sqrt{e_3 - e_1}}.$$

2. *Relations caractéristiques. Équations différentielles.* — Les expressions que je viens d'établir satisfont à des équations différentielles de premier ordre. Afin de les déduire, je profite des relations caractéristiques qui existent entre les éléments du système orthogonal (E) représentés au moyen des fonctions sigma, savoir (¹)

$$p_h(e) = -im_h e_{3h}, \qquad r_3(e) = -im_0 \qquad (h = 1, 2, 3).$$

(¹) *Voir* F. Caspary, *loc. cit.*, p. 378.

Or il suit du système (A)

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{C}\mathrm{E}e_{3h} &= \mathrm{A}(\mathfrak{c}_{1h}a_{31}+\mathfrak{c}_{2h}a_{32}+\mathfrak{c}_{3h}a_{33}-i\mathfrak{c}_{4h}\\ -i\mathfrak{C}\mathrm{E} &= \mathrm{A}(\mathfrak{c}_{14}a_{31}+\mathfrak{c}_{24}a_{32}+\mathfrak{c}_{34}a_{33}-i\mathfrak{c}_{44}\end{aligned}\right\}\qquad (h=1,2,3),$$

et

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{C}\mathrm{E}p_h(e) &= \mathrm{A}(\mathfrak{c}_{1h}p_1+\mathfrak{c}_{2h}p_2+\mathfrak{c}_{3h}p_3-i\mathfrak{c}_{4h}v_3)\\ \mathfrak{C}\mathrm{E}v_3(e) &= \mathrm{A}(\mathfrak{c}_{14}p_1+\mathfrak{c}_{24}p_2+\mathfrak{c}_{34}p_3-i\mathfrak{c}_{44}v_3)\end{aligned}\right\}\qquad (h=1,2,3).$$

La substitution de ces expressions transforme lesdites relations caractéristiques en les suivantes :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} -i\mathfrak{C}a_{3h} &= l_{h1}p_1+l_{h2}p_2+l_{h3}p_3-il_{h4}v_3\\ -\ \mathfrak{C}\quad &= l_{41}p_1+l_{42}p_2+l_{43}p_3-il_{44}v_3\end{aligned}\right\}\qquad (h=1,2,3),$$

où les coefficients l_{ij} sont définis par les égalités

$$(5)\qquad l_{ij}=\frac{\mathfrak{c}_{i1}\mathfrak{c}_{j1}}{m_1}+\frac{\mathfrak{c}_{i2}\mathfrak{c}_{j2}}{m_2}+\frac{\mathfrak{c}_{i3}\mathfrak{c}_{j3}}{m_3}-i\frac{\mathfrak{c}_{i4}\mathfrak{c}_{j4}}{m_0}=l_{ji}\qquad (i,j=1,2,3,4).$$

Posons, de plus,

$$(6)\qquad 2\mathrm{T}=\sum_{m,n}^{1,2,3} l_{mn}p_mp_n-l_{44}v_3^2-2iv_3(l_{14}p_1+l_{24}p_2+l_{34}p_3).$$

ou, en faisant usage de la dernière des relations (4) et en désignant par

$$l_{ij}^{rs}=l_{ri}l_{sj}-l_{rj}l_{si}\qquad (i,j,r,s=1,2,3,4)$$

les mineurs de deuxième ordre du déterminant symétrique $|l_{ij}|$.

$$(6)\qquad 2l_{44}\mathrm{T}=\sum_{m,n}^{1,2,3} l_{m4}^{n4}p_mp_n+\mathfrak{C}^2.$$

Alors les relations (4) prennent la forme simple

$$(4') \qquad \begin{cases} -i\mathfrak{C}a_{3h} = \dfrac{\partial T}{\partial p_h}, \\ \quad i\mathfrak{C} \quad = \dfrac{\partial T}{\partial v_3}. \end{cases}$$

Si l'on substitue encore les valeurs de T et de a_{3h} dans les identités différentielles

$$da_{3h} = a_{3k}p_l - a_{3l}p_k;$$

on en tire le théorème :

II. *Les nouvelles expressions au moyen des fonctions sigma établies au théorème I satisfont aux équations différentielles*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_h} = p_l\frac{\partial T}{\partial p_k} - p_k\frac{\partial T}{\partial p_l} \qquad (h, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2).$$

où

$$2T = \sum_{m,n}^{1,2,3} l_{mn}p_mp_n - l_{44}v_3^2 - 2iv_3\sum_{h=1}^{3} l_{h4}p_h = \frac{1}{l_{44}}\left(\sum_{m,n}^{1,2,3} l_{m4}^{n4}p_mp_n + \mathfrak{C}^2\right).$$

5. *Relations entre les intégrales.* — Je vais établir maintenant les relations qui lient les intégrales établies au théorème I. Elles découlent des identités algébriques

$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \qquad a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 = v_3$$

combinées aux relations (4). En posant

$$L_{ij} = l_{i1}l_{j1} + l_{i2}l_{j2} + l_{i3}l_{j3} + l_{i4}l_{j4} = L_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

ou, eu égard à la formule (5),

$$(7) \qquad L_{ij} = \mathfrak{C}\left(\frac{c_{i1}c_{j1}}{m_1^2} + \frac{c_{i2}c_{j2}}{m_2^2} + \frac{c_{i3}c_{j3}}{m_3^2} + \frac{c_{i4}c_{j4}}{m_0^2}\right),$$

on trouve le théorème :

III. *Les relations entre les intégrales des équations différen-*

tielles données au théorème II sont les suivantes :

$$l_{41}p_1 + l_{42}p_2 + l_{43}p_3 - il_{44}v_3 = -\mathfrak{C},$$

$$\sum_{m,n}^{1,2,3} \mathrm{L}_{mn}\, p_m p_n - \mathrm{L}_{44} v_3^2 - 2iv_3 \sum_{i=1}^{4} l_{i4}(l_{i1}p_1 + l_{i2}p_2 + l_{i3}p_3) = 0,$$

$$\sum_{h=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} p_h l_{kh} a_{3k} - iv_3 \sum_{k=1}^{3} l_{k4} a_{3k} = -i\mathfrak{C},$$

$$\sum_{m,n}^{1,2,3} l_{mn}p_m p_n + l_{44}v_3^2 + 2i\mathfrak{C}v_3 = 0.$$

La quatrième relation peut être mise sous l'autre forme

$$\sum_{m,n}^{1,2,3} l_{m4}^{n4} p_m p_n + \mathfrak{C}^2 = 0.$$

4. *Équations aux dérivées partielles.* — Le théorème I fait reconnaître que les quantités v_1, v_2 dépendent des deux variables u et v et sont des fonctions linéaires de du et dv dont j'appellerai les coefficients v_1^u, v_1^v ; v_2^u, v_2^v. Posons (¹)

$$v_1 = v_1^u\, du + v_1^v\, dv,$$
$$v_2 = v_2^u\, du + v_2^v\, dv.$$

On trouve immédiatement

$$v_1^u \pm iv_2^u = \pm(v_1^v \pm iv_2^v),$$
$$v_1^v \pm iv_2^v = \pm(v_1^u \pm iv_2^u),$$

en choisissant simultanément les signes supérieurs ou inférieurs, d'où il suit

$$v_1^u = \quad iv_2^v,$$
$$v_2^u = -iv_1^v.$$

(¹) *Voir* F. Caspary, *loc. cit.*, p. 377.

Alors les identités différentielles

$$da_{3h} = -a_{1h}v_2 + a_{2h}v_1 \qquad (h = 1, 2, 3)$$

conduisent aux équations aux dérivées partielles

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a_{3h}}{\partial u} &= i\left(a_{3l}\frac{\partial a_{3k}}{\partial v} - a_{3k}\frac{\partial a_{3l}}{\partial v}\right) \\ \frac{\partial a_{3h}}{\partial v} &= i\left(a_{3l}\frac{\partial a_{3k}}{\partial u} - a_{3k}\frac{\partial a_{3l}}{\partial u}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (h, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2).$$

Ces équations ont la même forme que celles que l'on doit à M. F. Kötter [1] et que j'ai généralisées dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Berlin [2].

5. *Généralisation des théorèmes I, II, III.* — La représentation des éléments d'un système orthogonal, établie en (A), et, par conséquent, toutes les formules qui en découlent, peuvent être généralisées de la manière suivante.

Lions au système orthogonal (A) un autre système orthogonal (A') par des relations analogues à celles qui lient le système (E) au système (A) et qui sont données en (2) et (3), savoir

$$\mathfrak{C}' A a_{3h} = A'(\mathfrak{c}'_{1h}a'_{31} + \mathfrak{c}'_{2h}a'_{32} + \mathfrak{c}'_{3h}a'_{33} - i\mathfrak{c}'_{4h}),$$
$$-i\mathfrak{C}' A = A'(\mathfrak{c}'_{14}a'_{31} + \mathfrak{c}'_{24}a'_{32} + \mathfrak{c}'_{34}a'_{33} - i\mathfrak{c}'_{44})$$

et

$$\mathfrak{C}' A p_h = A'(\mathfrak{c}'_{1h}p'_1 + \mathfrak{c}'_{2h}p'_2 + \mathfrak{c}'_{3h}p'_3 - i\mathfrak{c}'_{4h}v'_3),$$
$$\mathfrak{C}' A v_3 = A'(\mathfrak{c}'_{14}p'_1 + \mathfrak{c}'_{24}p'_2 + \mathfrak{c}'_{34}p'_3 - i\mathfrak{c}'_{44}v'_3)$$

en posant

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{c}'^2_{i1} + \mathfrak{c}'^2_{i2} + \mathfrak{c}'^2_{i3} + \mathfrak{c}'^2_{i4} = \mathfrak{c}'^2_{1i} + \mathfrak{c}'^2_{2i} + \mathfrak{c}'^2_{3i} + \mathfrak{c}'^2_{4i}$$

et en désignant par $\mathfrak{c}'_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ les seize coefficients constants

---

(1) *Sitzungsber. der Berl. Ak.*, p. 811; 1895. — *Journ. f. d. reine und angew. Math.*, t. CXVI, p. 226.

(2) *Sitzungsber. der Berl. Ak.*, p. 1029, 1030; 1896. — *Journ. f. d. reine und angew. Math.*, t. CXIX, p. 251, 252.

d'un système orthogonal ($\mathfrak{C}'$). La substitution de ces expressions change les relations (2) et (3) en les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}\mathfrak{C}' \mathrm{E} e_{3h} &= \mathrm{A}'[(\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{1h} a'_{31} + (\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{2h} a'_{32} + (\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{3h} a'_{33} - i(\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{4h}], \\ -i\mathfrak{C}\mathfrak{C}' \mathrm{E} \quad &= \mathrm{A}'[(\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{14} a'_{31} + (\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{24} a'_{32} + (\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{34} a'_{33} - i(\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{44}] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}\mathfrak{C}' \mathrm{E} p_h(e) &= \mathrm{A}'[(\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{1h} p'_1 + (\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{2h} p'_2 + (\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{3h} p'_3 - i(\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{4h} \mathfrak{c}'_3], \\ \mathfrak{C}\mathfrak{C}' \mathrm{E} \mathfrak{c}_3(e) &= \mathrm{A}'[(\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{14} p'_1 + (\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{24} p'_2 + (\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{34} p'_3 - i(\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{44} \mathfrak{c}'_3], \end{aligned}$$

où

$$(8) \qquad (\mathfrak{c}\mathfrak{c}')_{ij} = \mathfrak{c}_{1j}\mathfrak{c}'_{i1} + \mathfrak{c}_{2j}\mathfrak{c}'_{i2} + \mathfrak{c}_{3j}\mathfrak{c}'_{i3} + \mathfrak{c}_{4j}\mathfrak{c}'_{i4}.$$

De la même manière, je lie au système (A') un troisième système orthogonal (A''), au système (A'') un quatrième système orthogonal (A'''), et en continuant ce procédé je déduis les relations suivantes :

$$(2') \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S} \mathrm{E} e_{3h} &= \mathrm{A}^{(\nu)}[c_{1h} a^{(\nu)}_{31} + c_{2h} a^{(\nu)}_{32} + c_{3h} a^{(\nu)}_{33} - i c_{4h}], \\ -i\mathfrak{S}\mathrm{E} \quad &= \mathrm{A}^{(\nu)}[c_{14} a^{(\nu)}_{31} + c_{24} a^{(\nu)}_{32} + c_{34} a^{(\nu)}_{33} - i c_{44}], \end{aligned} \right.$$

et

$$(3') \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S} \mathrm{E} p_h(e) &= \mathrm{A}^{(\nu)}[c_{1h} p^{(\nu)}_1 + c_{2h} p^{(\nu)}_2 + c_{3h} p^{(\nu)}_3 - i c_{4h} \mathfrak{c}^{(\nu)}_3], \\ \mathfrak{S} \mathrm{E} \mathfrak{c}_3(e) &= \mathrm{A}^{(\nu)}[c_{14} p^{(\nu)}_1 + c_{24} p^{(\nu)}_2 + c_{34} p^{(\nu)}_3 - i c_{44} \mathfrak{c}^{(\nu)}_3] \end{aligned} \right.$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

où

$$\mathfrak{S} = c^2_{i1} + c^2_{i2} + c^2_{i3} + c^2_{i4} = c^2_{1i} + c^2_{2i} + c^2_{3i} + c^2_{4i}$$

et

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{C}\mathfrak{C}'\mathfrak{C}''\ldots\mathfrak{C}^{(\nu)}.$$

Les coefficients constants

$$c_{ij} = (\mathfrak{c}\mathfrak{c}'\mathfrak{c}''\ldots\mathfrak{c}^{(\nu)})_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

s'obtiennent en composant, d'une manière définie par l'équation (8), le système orthogonal ($\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$) au système orthogonal ($\mathfrak{C}''$), le système ($\mathfrak{C}\mathfrak{C}'\mathfrak{C}''$) au système ($\mathfrak{C}'''$) et, ainsi de suite, le système ($\mathfrak{C}\mathfrak{C}'\ldots\mathfrak{C}^{(\nu-1)}$) au système ($\mathfrak{C}^{(\nu)}$).

Désignons, de plus, les coefficients *adjoints* aux coefficients $\mathscr{c}_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ par $\mathscr{a}_{mn}$ et $\mathscr{b}_{mn}$ $(m, n = 1, 2, 3)$, et posons

$$\mathscr{C} = \mathscr{A}\mathscr{B}.$$

Alors on reconnaît aisément le théorème :

IV. *Les formules établies aux théorèmes I, II, III, subsistent encore, si l'on remplace*

$$\mathrm{A},\ a_{mn},\ p_h,\ v_h;\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{a}_{mn},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{b}_{mn},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{c}_{ij};\ l_{ij},\ \mathrm{L}_{ij},\ \mathrm{T}$$

respectivement par

$$\mathrm{A}^{(\nu)},\ a_{mn}^{(\nu)},\ p_h^{(\nu)},\ v_h^{(\nu)};\ \mathscr{A},\ \mathscr{a}_{mn},\ \mathscr{B},\ \mathscr{b}_{mn},\ \mathscr{C},\ \mathscr{c}_{ij};\ \mathscr{l}_{ij},\ \mathscr{L}_{ij},\ \tilde{\mathfrak{T}}.$$

Les quantités $\mathscr{l}_{ij}$, $\mathscr{L}_{ij}$, $\tilde{\mathfrak{T}}$ *découlent des quantités* l_{ij}, L_{ij}, T *par la substitution de* $\mathscr{c}_{ij}$ *au lieu de* $\mathfrak{c}_{ij}$.

Ainsi tous les problèmes auxquels conduisent les équations différentielles

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{\mathfrak{T}}}{\partial p_h^{(\nu)}} = p_l^{(\nu)}\frac{\partial\tilde{\mathfrak{T}}}{\partial p_k^{(\nu)}} - p_k^{(\nu)}\frac{\partial\tilde{\mathfrak{T}}}{\partial p_l^{(\nu)}},$$

où

$$2\tilde{\mathfrak{T}} = \sum_{m,n}^{1,2,3}\mathscr{l}_{mn}\,p_m^{(\nu)}p_n^{(\nu)} - \mathscr{l}_{44}\,v_3^{(\nu)2} - 2i\,v_3^{(\nu)}\sum_{h=1}^{3}\mathscr{l}_{h4}\,p_h^{(\nu)} = \frac{1}{\mathscr{l}_{44}}\left(\sum_{m,n}^{1,2,3}\mathscr{l}_{m4}^{n4}\,p_m^{(\nu)}\,p_n^{(\nu)} + \tilde{\mathfrak{T}}^2\right)$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

sont résolus complètement par les expressions des éléments $a_{mn}^{(\nu)}$, $p_h^{(\nu)}$, $v_h^{(\nu)}$ caractérisées au théorème IV, si l'on y détermine encore les quantités u, v, G, $\mathscr{c}_{ij}$, $\mathscr{a}_{mn}$, $\mathscr{b}_{mn}$ par les données des équations différentielles.

SECONDE PARTIE.

6. *Problème de la rotation de n corps liés l'un à l'autre. Équations différentielles.* — Les nouvelles expressions établies dans le théorème I comprennent, comme *cas spécial*, la solution du problème qui consiste à trouver la rotation de n corps solides dont l'un tourne autour d'un point fixe et les autres $n-1$ corps de révolution autour d'axes fixés au premier corps, soit qu'aucune force accélératrice ne les sollicite, soit que le point fixe coïncide avec le centre de gravité et que la pesanteur agisse seule [1].

Afin d'établir les équations différentielles de ce problème, supposons d'abord l'argument v constant et posons

$$u = n(t - t_0),$$
$$m_s = \mathfrak{m}_s dt, \qquad l_{ij} dt = \mathfrak{l}_{ij}.$$

En ce cas, il suit du théorème I

$$\mathrm{G} = e^{\left(\frac{\mathfrak{m}_s}{n} - \frac{\sigma'_s v}{\sigma_s v}\right)u} \qquad (s = 0, 1, 2, 3). \tag{9}$$

Posons encore

$$\begin{cases} p_1 = p\,dt, & p_2 = q\,dt, & p_3 = r\,dt, & c_3 = c\,dt, \\ \mathfrak{l}_{14} = \alpha, & \mathfrak{l}_{24} = \beta, & \mathfrak{l}_{34} = \gamma. & \mathfrak{l}_{44} = \delta. \end{cases} \tag{10}$$

et soumettons les coefficients l_{ij} aux conditions

$$\begin{cases} \mathfrak{l}^{34}_{24} = \mathfrak{l}^{12}_{31} = 0, & \mathfrak{l}^{14}_{34} = \mathfrak{l}^{23}_{12} = 0, & \mathfrak{l}^{24}_{14} = \mathfrak{l}^{31}_{23} = 0, \\ \mathfrak{l}^{14}_{14} = \mathrm{A}, & \mathfrak{l}^{24}_{24} = \mathrm{B}, & \mathfrak{l}^{34}_{34} = \mathrm{C}, \end{cases} \tag{W}$$

---

(1) Les conditions de ce problème se trouvent réalisées dans l'appareil connu sous le nom de *gyroscope* de Bohnenberger-Foucault.

ou aux conditions

$$(\text{V})\qquad \begin{cases} l_{23}=0, & l_{31}=0, & l_{12}=0,\\ l_{11}=\text{A}, & l_{22}=\text{B}, & l_{33}=\text{C},\end{cases}$$

où α, β, γ, δ, A, B, C désignent des constantes.

Alors j'obtiens les relations caractéristiques (4) dans les deux formes différentes

$$(\text{W}_1)\qquad \begin{cases} -i\mathfrak{C}\delta_{44}a_{31}=\text{A}p+\alpha(\alpha p+\beta q+\gamma r-i\delta_{44}v),\\ -i\mathfrak{C}\delta_{44}a_{32}=\text{B}q+\beta(\alpha p+\beta q+\gamma r-i\delta_{44}v),\\ -i\mathfrak{C}\delta_{44}a_{33}=\text{C}r+\gamma(\alpha p+\beta q+\gamma r-i\delta_{44}v)\end{cases}$$

ou

$$(\text{V}_1)\qquad \begin{cases} -i\mathfrak{C}a_{31}=\text{A}p-i\alpha v,\\ -i\mathfrak{C}a_{32}=\text{B}q-i\beta v,\\ -i\mathfrak{C}a_{33}=\text{C}r-i\gamma v,\end{cases}$$

de sorte que les équations différentielles deviennent

$$(\text{W}_2)\qquad \begin{cases} \text{A}\dfrac{dp}{dt}=(\text{B}-\text{C})qr-\mathfrak{C}(\beta r-\gamma q),\\ \text{B}\dfrac{dq}{dt}=(\text{C}-\text{A})rp-\mathfrak{C}(\gamma p-\alpha r),\\ \text{C}\dfrac{dr}{dt}=(\text{A}-\text{B})pq-\mathfrak{C}(\alpha q-\beta p)\end{cases}$$

ou

$$(\text{V}_2)\qquad \begin{cases} \text{A}\dfrac{dp}{dt}=(\text{B}-\text{C})qr-iv(\beta r-\gamma q)+i\alpha\dfrac{dv}{dt},\\ \text{B}\dfrac{dq}{dt}=(\text{C}-\text{A})rp-iv(\gamma p-\alpha r)+i\beta\dfrac{dv}{dt},\\ \text{C}\dfrac{dr}{dt}=(\text{A}-\text{B})pq-iv(\alpha q-\beta p)+i\gamma\dfrac{dv}{dt}.\end{cases}$$

Les relations qui existent entre les intégrales de ces équations diffé-

rentielles prennent la forme

$$
(\mathrm{W}_3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\alpha p + \beta q + \gamma r - i\delta_{44} v = -\mathfrak{C},\\
&(\mathrm{A}p - \mathfrak{C}\alpha)^2 + (\mathrm{B}q - \mathfrak{C}\beta)^2 + (\mathrm{C}r - \mathfrak{C}\gamma)^2 = -\delta_{44}^2\mathfrak{C}^2,\\
&(\mathrm{A}p - \mathfrak{C}\alpha)a_{31} + (\mathrm{B}q - \mathfrak{C}\beta)a_{32} + (\mathrm{C}r - \mathfrak{C}\gamma)a_{33} = -i\mathfrak{C}\delta_{44},\\
&\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 = -\mathfrak{C}^2
\end{aligned}
\right.
$$

ou

$$
(\mathrm{V}_3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\alpha p + \beta q + \gamma r - i\delta_{44} v_3 = -\mathfrak{C},\\
&(\mathrm{A}p - i\alpha v_3)^2 + (\mathrm{B}q - i\beta v_3)^2 + (\mathrm{C}r - i\gamma v_3)^2 = -\mathfrak{C}^2,\\
&(\mathrm{A}p - i\alpha v_3)a_{31} + (\mathrm{B}q - i\beta v_3)a_{32} + (\mathrm{C}r - i\gamma v_3)a_{33} = -i\mathfrak{C},\\
&\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 + \delta_{44} v^2 + 2i\mathfrak{C}v = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Supposons maintenant, dans le cas de deux corps, que A, B, C désignent les quotients des principaux moments d'inertie du système et du moment d'inertie du deuxième corps, et α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe autour duquel le deuxième corps tourne. Si l'on remplace α, β, γ par α, α_1, α_2, $\mathfrak{C}$ par $-\omega$ et $-i\delta_{44}v$ par $\frac{d\delta}{dt}$, en désignant par δ l'angle qui détermine la position instantanée de ce corps, les équations différentielles (W_2) deviennent identiques à celles que M. Wangerin [1] a établies.

De l'autre côté, si l'on remplace $-v$ par ω, en désignant maintenant par ω la vitesse angulaire du deuxième corps, les équations (V_2) deviennent celles dues à M. Volterra [2].

Dans le cas général de n corps liés l'un à l'autre de la manière indiquée ci-dessus, on peut généraliser aisément l'interprétation mécanique desdits coefficients.

7. *Détermination des constantes à l'aide des équations différentielles.* — Je vais déterminer les coefficients $\mathfrak{c}_{ij}$ et les quantités

(1) *Ueber die Rotation mit einander verbundener Körper* (*Univers. Schr. Halle*, 1889, p. 17, 18). Je dois un exemplaire de ce Mémoire rare à la bienveillance de M. E. Lampe. — *Voir* aussi P. Serf, *Diss. Bonn*, 1890.

(2) *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici* (*Ann. di Mat.*, t. XXIV, p. 37). — *Voir* aussi *Atti di Torino*, t. XXX.

$\frac{\sigma_1 V}{\sigma V}$, $\frac{\sigma_2 V}{\sigma V}$, $\frac{\sigma_3 V}{\sigma V}$; $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$, $\mathfrak{m}_0$ par A, B, C, α, β, γ, δ_{44}, ainsi que la fonction G et l'argument u comme fonction de t. Voici les calculs :

Entre les coefficients l_{ij} et $\mathfrak{r}_{ij}$ existent les relations (5), dont il suit

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{C}\frac{\mathfrak{r}_{1j}}{m_j} &= l_{11}\mathfrak{r}_{1j} + l_{12}\mathfrak{r}_{2j} + l_{13}\mathfrak{r}_{3j} + l_{14}\mathfrak{r}_{4j}\\ \mathfrak{C}\frac{\mathfrak{r}_{2j}}{m_j} &= l_{21}\mathfrak{r}_{1j} + l_{22}\mathfrak{r}_{2j} + l_{23}\mathfrak{r}_{3j} + l_{24}\mathfrak{r}_{4j}\\ \mathfrak{C}\frac{\mathfrak{r}_{3j}}{m_j} &= l_{31}\mathfrak{r}_{1j} + l_{32}\mathfrak{r}_{2j} + l_{33}\mathfrak{r}_{3j} + l_{34}\mathfrak{r}_{4j}\\ -i\,\mathfrak{C}\frac{\mathfrak{r}_{4j}}{m_j} &= l_{41}\mathfrak{r}_{1j} + l_{42}\mathfrak{r}_{2j} + l_{43}\mathfrak{r}_{3j} + l_{44}\mathfrak{r}_{4j}\end{aligned}\right\}\quad\begin{pmatrix} j = 1, 2, 3, 4\\ m_4 = m_0\end{pmatrix}.$$

Dans le cas caractérisé par (W), elles prennent la forme

$$(\mathrm{W}_4)\quad\left\{\begin{aligned}\mathfrak{C}\delta_{44}\frac{\mathfrak{r}_{1j}}{\mathfrak{m}_j} &= \mathrm{A}\mathfrak{r}_{1j} - i\mathfrak{C}\delta_{44}\alpha\frac{\mathfrak{r}_{4j}}{\mathfrak{m}_j},\\ \mathfrak{C}\delta_{44}\frac{\mathfrak{r}_{2j}}{\mathfrak{m}_j} &= \mathrm{B}\mathfrak{r}_{2j} - i\mathfrak{C}\delta_{44}\beta\frac{\mathfrak{r}_{4j}}{{}_j\mathfrak{m}},\\ \mathfrak{C}\delta_{44}\frac{\mathfrak{r}_{3j}}{\mathfrak{m}_j} &= \mathrm{C}\mathfrak{r}_{3j} - i\mathfrak{C}\delta_{44}\gamma\frac{\mathfrak{r}_{4j}}{\mathfrak{m}_j},\\ -i\mathfrak{C}\delta_{44}\frac{\mathfrak{r}_{4j}}{\mathfrak{m}_j} &= \delta_{44}(\alpha\mathfrak{r}_{1j} + \beta\mathfrak{r}_{2j} + \gamma\mathfrak{r}_{3j} + \delta_{44}\mathfrak{r}_{4j});\end{aligned}\right.$$

dans le cas caractérisé par (V), l'autre forme

$$(\mathrm{V}_4)\quad\left\{\begin{aligned}\mathfrak{C}\frac{\mathfrak{r}_{1j}}{\mathfrak{m}_j} &= \mathrm{A}\mathfrak{r}_{1j} + \alpha\mathfrak{r}_{4j},\\ \mathfrak{C}\frac{\mathfrak{r}_{2j}}{\mathfrak{m}_j} &= \mathrm{B}\mathfrak{r}_{2j} + \beta\mathfrak{r}_{4j},\\ \mathfrak{C}\frac{\mathfrak{r}_{3j}}{\mathfrak{m}_j} &= \mathrm{C}\mathfrak{r}_{3j} + \gamma\mathfrak{r}_{4j},\\ -i\,\mathfrak{C}\frac{\mathfrak{r}_{4j}}{\mathfrak{m}_j} &= \alpha\mathfrak{r}_{1j} + \beta\mathfrak{r}_{2j} + \gamma\mathfrak{r}_{3j} + \delta_{44}\mathfrak{r}_{4j}.\end{aligned}\right.$$

La résolution de ces systèmes d'équations linéaires conduit à l'équation biquadratique

$$(11)\qquad \mathrm{M}(\lambda) = 0,\qquad \lambda = \mathfrak{m}_j^{-1},$$

où, dans le premier cas,

$$M = \begin{vmatrix} A - \mathfrak{C}\partial_{44}\lambda & 0 & 0 & -i\mathfrak{C}\alpha\lambda \\ 0 & B - \mathfrak{C}\partial_{44}\lambda & 0 & -i\mathfrak{C}\beta\lambda \\ 0 & 0 & C - \mathfrak{C}\partial_{44}\lambda & -i\mathfrak{C}\gamma\lambda \\ \partial_{44}\alpha & \partial_{44}\beta & \partial_{44}\gamma & \partial_{44} + i\mathfrak{C}\lambda \end{vmatrix};$$

dans l'autre cas (¹),

$$M = \begin{vmatrix} A - \mathfrak{C}\lambda & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & B - \mathfrak{C}\lambda & 0 & \beta \\ 0 & 0 & C - \mathfrak{C}\lambda & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \partial_{44} + i\mathfrak{C}\lambda \end{vmatrix}.$$

Les racines de ces équations biquadratiques fournissent les valeurs de m_1, m_2, m_3, m_0. Si l'on désigne encore les mineurs de troisième ordre du déterminant M par M_{ij}, on a

$$(12) \qquad \frac{c_{ij}}{c_{44}} = \frac{M_{ij}}{M_{44}},$$

d'où les coefficients *adjoints* a_{mn} et b_{mn} se déterminent à l'aide des équations (1).

Après avoir trouvé les valeurs de m_1, m_2, m_3, m_0, on tire du théorème I les égalités

$$m_1 = n\left(\frac{\sigma_1' v}{\sigma_1 v} + d\log G\right),$$

$$m_2 = n\left(\frac{\sigma_2' v}{\sigma_2 v} + d\log G\right),$$

$$m_3 = n\left(\frac{\sigma_3' v}{\sigma_3 v} + d\log G\right),$$

$$m_0 = n\left(\frac{\sigma' v}{\sigma v} + d\log G\right),$$

(¹) *Voir* VOLTERRA, *Sul moto di un sistema nel quale susistono moti interni stazionari* (*Atti di Torino*, t. XXX).

qui, au moyen de relations connues [1], conduisent aux équations

$$\mathfrak{m}_2 - \mathfrak{m}_3 = \frac{n\varepsilon_1}{\varepsilon_2\varepsilon_3}\,\frac{\sigma v\,\sigma_1 v}{\sigma_2 v\,\sigma_3 v},$$

$$\mathfrak{m}_3 - \mathfrak{m}_1 = \frac{n\varepsilon_2}{\varepsilon_3\varepsilon_1}\,\frac{\sigma v\,\sigma_2 v}{\sigma_3 v\,\sigma_1 v},$$

$$\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_2 = \frac{n\varepsilon_3}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,\frac{\sigma v\,\sigma_3 v}{\sigma_1 v\,\sigma_2 v},$$

$$\frac{\varepsilon_h(\mathfrak{m}_h - \mathfrak{m}_k)(\mathfrak{m}_l - \mathfrak{m}_h)}{\varepsilon_k\varepsilon_l(\mathfrak{m}_h - \mathfrak{m}_0)} = -\frac{n}{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\,\frac{\sigma^3 v}{\sigma_1 v\,\sigma_2 v\,\sigma_3 v} \qquad \left\{\begin{matrix} h, k, l = 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \\ 3, 1, 2 \end{matrix}\right\};$$

d'où il suit

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} & i\varepsilon_1\sigma_1 v : i\varepsilon_2\sigma_2 v : i\varepsilon_3\sigma_3 v : \sigma v \\ & \quad = (\mathfrak{m}_2 - \mathfrak{m}_3)^{\frac{1}{2}} : (\mathfrak{m}_3 - \mathfrak{m}_1)^{\frac{1}{2}} : (\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_2)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{\varepsilon_h(\mathfrak{m}_h - \mathfrak{m}_k)(\mathfrak{m}_l - \mathfrak{m}_h)}{\varepsilon_k\varepsilon_l(\mathfrak{m}_h - \mathfrak{m}_0)}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Il reste enfin à déterminer la constante n. Des équations établies ci-dessus

$$\frac{\mathfrak{m}_1}{n} - \frac{\sigma_1' v}{\sigma_1 v} = \frac{\mathfrak{m}_2}{n} - \frac{\sigma_2' v}{\sigma_2 v} = \frac{\mathfrak{m}_3}{n} - \frac{\sigma_3' v}{\sigma_3 v} = \frac{\mathfrak{m}_0}{n} - \frac{\sigma' v}{\sigma v},$$

on obtient [2], en profitant d'une relation connue,

$$(14)\qquad \varepsilon_h n^2 = \varepsilon_k\varepsilon_l(\mathfrak{m}_0 - \mathfrak{m}_h)(\mathfrak{m}_k - \mathfrak{m}_l),$$

où d'après (W_4)

$$\mathfrak{m}_1 = \frac{\mathfrak{C}\delta_{44}}{A}\left(1 + i\alpha\frac{c_{41}}{c_{11}}\right),$$

$$\mathfrak{m}_2 = \frac{\mathfrak{C}\delta_{44}}{B}\left(1 + i\beta\frac{c_{42}}{c_{22}}\right),$$

$$\mathfrak{m}_3 = \frac{\mathfrak{C}\delta_{44}}{C}\left(1 + i\gamma\frac{c_{43}}{c_{33}}\right),$$

$$\mathfrak{m}_0 = -\frac{i\mathfrak{C}c_{44}}{\alpha c_{14} + \beta c_{24} + \gamma c_{34} + \delta_{44}c_{44}},$$

(1) *Voir* WEIERSTRASS-SCHWARZ, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen*, p. 29; et F. CASPARY, *loc. cit.*, p. 395, 396.

(2) *Voir* VOLTERRA, *loc. cit.*

d'après (V_4)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}_1 &= \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{r}_{11}}{A\mathfrak{r}_{11} + \alpha\mathfrak{r}_{41}}, \\
\mathfrak{m}_2 &= \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{r}_{22}}{B\mathfrak{r}_{22} + \beta\mathfrak{r}_{42}}, \\
\mathfrak{m}_3 &= \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{r}_{33}}{C\mathfrak{r}_{33} + \gamma\mathfrak{r}_{43}}, \\
\mathfrak{m}_0 &= -\frac{i\mathfrak{C}\mathfrak{r}_{44}}{\alpha\mathfrak{r}_{14} + \beta\mathfrak{r}_{24} + \gamma\mathfrak{r}_{34} + \delta_{44}\mathfrak{r}_{44}}.
\end{aligned}$$

8. *Généralisation du problème.* — Le problème de rotation que je viens de traiter peut être généralisé de la manière suivante : Soient un corps et les $n-1$ corps correspondants définis plus haut (p. 168); je considère dans chacun de ces $n-1$ corps une série de m corps de révolution tels que chacun de ces m corps tourne autour d'un axe fixé au corps qui le précède. Les expressions des éléments du système orthogonal qui détermine le mouvement de ce système dynamique découlent immédiatement du théorème IV, si l'on y choisit encore convenablement les quantités u, v, G: c_{ij}, a_{mn}, b_{mn} par la méthode employée dans le numéro **7**.

Ce système dynamique appartient à ceux que H. von Helmholtz a appelés *systèmes polycycliques*.

Sur l'égalité de Clausius;

PAR M. P. DUHEM.

Tout le monde connaît la forme sous laquelle Clausius a étendu le théorème de Carnot à tous les cycles réversibles et la méthode qui lui a permis de déduire du théorème de Carnot cette forme plus générale. G. Kirchhoff (¹) a quelque peu modifié cette méthode sans en changer l'esprit essentiel.

Ces démonstrations ne peuvent être rendues rigoureuses que moyennant l'emploi de précautions longues et minutieuses; dans la seconde Partie (²) de notre *Commentaire aux principes de la Thermodynamique,* au Chapitre III, nous avons indiqué quelles précautions exigeait la démonstration de Clausius; ce que nous avons dit pourrait être presque textuellement répété en ce qui concerne la démonstration de G. Kirchhoff.

Nous nous proposons d'indiquer ici une démonstration qui, tout en étant susceptible de la même rigueur, nous semble plus brève et plus élégante.

Nous supposerons établi que, pour tout cycle de Carnot réversible décrit entre les températures (lues sur un thermomètre quel-

(¹) G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über die Theorie der Wärme*, p. 58 (Leipzig, 1894).

(²) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. IX, p. 293; 1893.

conque) $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$, *on a l'égalité*

$$(1) \qquad \frac{Q}{F(\mathfrak{F})} + \frac{Q'}{F(\mathfrak{F}')} = 0,$$

$F(\mathfrak{F})$ étant la température absolue qui correspond à la température $\mathfrak{F}$, lue sur un thermomètre quelconque, et Q, Q′ désignant les quantités de chaleur dégagées par le système pendant qu'il parcourt respectivement l'isotherme relative à la température $\mathfrak{F}$ et l'isotherme relative à la température $\mathfrak{F}'$.

Nous garderons ensuite tout ce qui a été dit aux n^{os} **1** et **2** du Chapitre III du Mémoire considéré, sauf, toutefois, une phrase du n° **2**. Cette phrase est la suivante :

« Nous admettrons qu'un espace à adiabatiques réversibles ne se ferme jamais sur lui-même comme une ligne fermée ou une surface fermée, mais qu'il forme toujours un espace simplement connexe s'étendant jusqu'aux limites du champ des valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{F}$. »

Cette phrase énonce une restriction inutile; elle doit être supprimée.

Les équations d'équilibre du système étant

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} A = f_\alpha(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{F}), \\ B = f_\beta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{F}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L = f_\lambda(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{F}), \\ \Theta = f_{\mathfrak{F}}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{F}), \end{array}\right.$$

les coefficients calorifiques du système en équilibre sont des fonctions de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{F}$ définies par les égalités

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} R_\alpha = \dfrac{\partial U}{\partial \alpha} - \dfrac{f_\alpha}{E}, \\ R_\beta = \dfrac{\partial U}{\partial \beta} - \dfrac{f_\beta}{E}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_\lambda = \dfrac{\partial U}{\partial \lambda} - \dfrac{f_\lambda}{E}, \\ C = \dfrac{\partial U}{\partial \mathfrak{F}} - \dfrac{f_{\mathfrak{F}}}{E}, \end{array}\right.$$

où E est l'équivalent mécanique de la chaleur et U l'énergie interne, *fonction continue et uniforme* de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{z}$.

Nous supposerons que $R_\alpha, R_\beta, \ldots, R_\lambda$, C sont, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport à $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{z}$, des fonctions continues de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{z}$.

Nous remplacerons les développements donnés à partir du n° **5** du Mémoire cité par les suivants :

5. *Propriété fondamentale des cycles isothermiques.* — Considérons un cycle isothermique réversible : un tel cycle peut évidemment être regardé comme un cycle de Carnot particulier dans lequel les deux températures limites $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}'$ sont égales entre elles. L'égalité (1) conduit alors au théorème suivant :

Si un système décrit un cycle isothermique réversible, il dégage une quantité totale de chaleur égale à o.

La quantité de chaleur dégagée durant une des modifications isothermiques élémentaires, dont la suite constitue le cycle, a pour valeur

$$dQ = -(R_\alpha\, d\alpha + R_\beta\, d\beta + \ldots + R_\lambda\, d\lambda).$$

Le théorème précédent donne donc, en vertu des égalités (3),

$$\begin{aligned} o = &\int \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha}\, d\alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta}\, d\beta + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \lambda}\, d\lambda\right) \\ &- \frac{1}{E}\int (f_\alpha\, d\alpha + f_\beta\, d\beta + \ldots + f_\lambda\, d\lambda). \end{aligned}$$

Or, la fonction U étant une fonction uniforme et continue de α, $\beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{z}$, la première intégrale, étendue à un cycle le long duquel la température $\mathfrak{z}$ demeure invariable, est égale à o. L'égalité précédente devient donc

$$(4) \qquad \int (f_\alpha\, d\alpha + f_\beta\, d\beta + \ldots + f_\lambda\, d\lambda) = o,$$

ce qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Lorsqu'un système parcourt un cycle isothermique réversible, le

travail effectué, durant le parcours de ce cycle, par les actions extérieures qui, à chaque instant, le maintiennent en équilibre, est égal à o.

Ce théorème a été donné par J. Moutier.

Considérons dans l'espace des α, β, ..., λ, $\mathfrak{S}$, une ligne fermée quelconque le long de laquelle $\mathfrak{S}$ garde une valeur constante. En vertu du corollaire énoncé au n° **1** du Mémoire cité, cette ligne peut toujours être regardée comme le tracé d'un cycle isothermique réversible auquel l'égalité (4) est applicable.

Il existe une fonction $\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S})$ *telle que l'on ait*

$$(5) \qquad f_\alpha = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \alpha}, \qquad f_\beta = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \beta}, \qquad \ldots, \qquad f_\lambda = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \lambda}.$$

Lorsque $\mathfrak{S}$ *est maintenu constant, cette fonction est une fonction uniforme et continue de* α, β, ..., λ.

On peut toujours lui ajouter une fonction arbitraire de $\mathfrak{S}$.

4. *Continuité et uniformité de la fonction* $\mathcal{G}$. — Si la température $\mathfrak{S}$ varie, la fonction $\mathcal{G}$ peut n'être plus une fonction uniforme et continue des variables α, β, ..., λ, $\mathfrak{S}$. A cet égard, nous poserons successivement deux questions :

1° *Peut-il exister, dans l'espace à n dimensions des* α, β, ..., λ, $\mathfrak{S}$, *un espace* D *à* $(n-1)$ *dimensions tel que la fonction* $\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S})$ *varie d'une manière discontinue lorsque le point* $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S})$, *se déplaçant d'une manière continue, vient à traverser cet espace?*

La fonction $\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S})$ devant varier d'une manière continue le long de tout chemin isothermique, on voit qu'aucune ligne isothermique ne peut traverser l'espace D; cet espace est donc isothermique.

Si la fonction $\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S})$ *est discontinue le long d'un espace* D, *à* $(n-1)$ *dimensions, tracé dans l'espace des* α, β, ..., λ, $\mathfrak{S}$, *la température a la même valeur en tous les points de l'espace* D.

Menons, s'il en existe, au travers de l'espace à n dimensions des $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}$, les espaces isothermiques D, D', D'', ... le long desquels la fonction $\mathcal{G}$ peut être discontinue; soient $\theta, \theta', \theta'', \ldots$ les températures auxquelles correspondent ces espaces. Ces espaces à $n-1$ dimensions divisent l'espace des $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}$ en espace à n dimensions partiels, tels qu'au sein de chacun d'eux la fonction $\mathcal{G}$ varie d'une manière continue; ainsi la fonction $\mathcal{G}$ sera assurément continue si la température $\mathfrak{S}$ demeure comprise entre θ et θ'. Mais, dans ce domaine, cette fonction peut n'être pas uniforme. D'où la question suivante :

2° *Dans une région de l'espace des $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}$, où elle varie d'une manière continue, la fonction $\mathcal{G}$ admet-elle un espace critique* C *à* $(n-2)$ *dimensions?*

Un tel espace critique est d'ailleurs défini de la manière suivante :

Si deux cycles γ, γ', tracés dans la région considérée, peuvent être amenés à coïncider comme forme et sens de parcours sans que ni l'un ni l'autre rencontre l'espace C, les deux intégrales $\int_\gamma d\mathcal{G}$, $\int_{\gamma'} d\mathcal{G}$ ont la même valeur. Si, pour venir d'un mouvement continu se superposer au cycle γ, le cycle γ' doit avoir avec l'espace C au moins une rencontre, et s'il n'est pas nécessaire qu'il ait plus d'une rencontre, les deux intégrales $\int_\gamma d\mathcal{G}$, $\int_{\gamma'} d\mathcal{G}$ ont des valeurs différentes.

Considérons d'abord deux cycles γ, γ', isothermes et relatifs à la même température $\mathfrak{S}$. La fonction $\mathcal{G}$ étant uniforme et continue lorsque $\mathfrak{S}$ ne varie pas, les deux intégrales $\int_\gamma d\mathcal{G}$, $\int_{\gamma'} d\mathcal{G}$ auront la même valeur. On en conclut sans peine que l'espace isothermique considéré ne peut avoir, en commun avec l'espace critique C à $(n-2)$ dimensions, un ou plusieurs domaines à $(n-3)$ dimensions; s'il en était ainsi, en effet, on pourrait tracer en l'espace isothermique considéré un cycle γ susceptible de se réduire à un circuit évanouissant sans tendre vers un point de l'un des domaines à $(n-3)$ dimensions, et aussi un cycle γ', susceptible de tendre vers un point de l'un de ces domaines; il est clair que, pour amener le circuit γ' à coïncider avec le

circuit γ, il serait nécessaire et suffisant de rencontrer une fois et une seule l'espace critique C, en sorte que $\int_\gamma d\mathcal{G}$ et $\int_{\gamma'} d\mathcal{G}$ auraient des valeurs différentes, contrairement à ce que nous venons de démontrer.

Donc, deux faits peuvent se présenter :

Ou bien l'espace isothermique $\mathfrak{Z}$ ne rencontre pas l'espace critique C;

Ou bien l'espace isothermique $\mathfrak{Z}$ a, avec l'espace critique C, en commun, un domaine continu à $(n-2)$ dimensions. D'où le théorème suivant :

Si, dans une région où elle varie d'une manière continue, la fonction $\mathcal{G}$ admet certains espaces critiques C, C', ... à $(n-2)$ dimensions, chacun de ces espaces appartient en entier à un espace isotherme à $(n-1)$ dimensions.

Soit $\mathfrak{Z} = t$ l'équation qui caractérise un espace isothermique I, supposé contenir un espace critique C. Soient $t' < t$ et $t'' < t$ deux températures telles que, lorsque $\mathfrak{Z}$ varie entre les limites t', t'', la fonction $\mathcal{G}$ varie d'une manière continue et n'admette pas d'autre espace critique que l'espace C. Proposons-nous d'étudier la valeur de $\int d\mathcal{G}$ le long de cycles non isothermiques rencontrant l'espace I; pour ne point entrer en d'inutiles complications, considérons seulement les cycles qui percent l'espace I en deux points : l'un, M, où la température passe de valeurs inférieures à t à des valeurs supérieures à t; l'autre, N, où la température passe de valeurs supérieures à t à des valeurs inférieures à t.

Il est clair que deux cycles pour lesquels les points M, N sont les mêmes peuvent être amenés à coïncider sans que ni l'un ni l'autre rencontre l'espace C; $\int d\mathcal{G}$ a donc pour ces deux cycles la même valeur. Pour connaître cette valeur, on peut donner une forme particulière au cycle qui passe par les points M, N. Supposons que les $(n-1)$ égalités

$$(6) \qquad R_\alpha = 0, \qquad R_\beta = 0, \qquad \ldots, \qquad R_\lambda = 0$$

ne soient simultanément vérifiées ni au point M, ni au point N.

On pourra alors, par chacun de ces points, mener au moins d'une manière une ligne infiniment petite vérifiant l'équation

$$R_\alpha d\alpha + R_\beta d\beta + \ldots + R_\lambda d\lambda + C d\mathfrak{z} = 0$$

et représentant par conséquent une modification adiabatique, sans que l'on ait le long de cette ligne

$$d\mathfrak{z} = 0.$$

Au point M, menons une telle ligne infiniment petite, du point m, où $\mathfrak{z} = t - \varepsilon$, au point m', où $\mathfrak{z} = t + \varepsilon$. De même, au point N, menons une telle ligne infiniment petite, du point n, où $\mathfrak{z} = t - \varepsilon$, au point n', où $\mathfrak{z} = t + \varepsilon$. Joignons les points m, n par une ligne isothermique, de température $(t - \varepsilon)$, et les points m', n' par une ligne isothermique, de température $(t + \varepsilon)$.

Le long du cycle $mm'n'nm$, l'intégrale $\int d\mathcal{G}$ a la valeur que nous nous proposons de calculer; d'ailleurs $\int_{mm'} d\mathcal{G}$ et $\int_{n'n} d\mathcal{G}$ étant visiblement des quantités infiniment petites, l'intégrale dont nous voulons calculer la valeur diffère infiniment peu de

$$\int_{m'n'} d\mathcal{G} + \int_{nm} d\mathcal{G}.$$

Mais le cycle considéré est un cycle de Carnot réversible, auquel l'égalité (1) est applicable. En vertu des relations (3) et (5), cette égalité devient

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{U(m') - U(n')}{F(t+\varepsilon)} + \frac{U(n) - U(m)}{F(t-\varepsilon)} \\ &\quad + \frac{1}{EF(t+\varepsilon)} \int_{m'n'} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \beta} d\beta + \ldots + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \lambda} d\lambda \right) \\ &\quad + \frac{1}{EF(t-\varepsilon)} \int_{nm} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \beta} d\beta + \ldots + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \lambda} d\lambda \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

La fonction U étant uniforme et continue, la somme qui figure à la

première ligne est infiniment petite. Si l'on observe que le long des lignes $m'n'$, nm, $\mathfrak{T}$ ne varie pas, on voit que l'égalité précédente entraîne la conséquence suivante : La quantité

$$\frac{1}{F(t+\varepsilon)}\int_{m'n'} d\mathcal{G} + \frac{1}{F(t-\varepsilon)}\int_{nm} d\mathcal{G}$$

est infiniment petite. Cette proposition équivaut d'ailleurs à celle-ci : La quantité

$$\int_{m'n'} d\mathcal{G} + \int_{nm} d\mathcal{G}$$

est infiniment petite; ou enfin à celle-ci :

Prise le long d'un cycle qui est tracé dans une région où $\mathcal{G}$ varie d'une manière continue et qui rencontre l'espace I, *l'intégrale*

$$\int d\mathcal{G}$$

est égale à o, *pourvu qu'en aucun des points de rencontre du cycle et de l'espace* I *les* $(n-1)$ *égalités* (6) *ne soient simultanément vérifiées.*

Cette proposition, à son tour, entraîne cette autre :

Si, dans l'une des régions où $\mathcal{G}$ est fonction continue de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$, il n'existe aucun domaine à $(n-1)$ dimensions, d'étendue finie, en tout point duquel on ait les n égalités

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathfrak{T} = \text{const.}, \\ R_\alpha = 0, \quad R_\beta = 0, \quad \ldots, \quad R_\lambda = 0, \end{cases}$$

dans cet espace, la fonction $\mathcal{G}$ est fonction uniforme des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$.

S'il existe un domaine d'étendue finie, à $(n-1)$ dimensions, en tout point duquel les égalités (8) *sont vérifiées, il se peut que la*

fonction $\mathcal{G}$ ne soit pas uniforme. Le domaine en question forme alors une coupure artificielle transformant la fonction $\mathcal{G}$ en fonction uniforme, mais discontinue.

Considérons maintenant un espace isothermique D, représenté par l'équation $\mathfrak{S} = t$, qui puisse être pour la fonction $\mathcal{G}$ un espace de discontinuité. Nous pourrons toujours, d'après ce qui précède, trouver deux températures : l'une, t', inférieure à t; l'autre, t'', supérieure à t, telles que la fonction $\mathcal{G}$ soit continue et uniforme lorsque la température varie entre t' et t, et aussi continue et uniforme lorsque la température varie entre t et t''.

Cela étant, prenons, en l'espace D, deux points M, N, tels que les égalités (6) ne soient simultanément vérifiées ni au point M, ni au point N. Par ces points faisons, comme dans le raisonnement précédent, passer un cycle de Carnot $mm'n'nm$ et appliquons l'égalité (1). Nous obtiendrons ainsi l'égalité (7) que nous pourrons écrire

$$\left[\frac{U(m')}{F(t+\varepsilon)} - \frac{U(m)}{F(t-\varepsilon)}\right] + \left[\frac{U(n')}{F(t+\varepsilon)} - \frac{U(n)}{F(t-\varepsilon)}\right]$$
$$-\frac{1}{E}\left[\frac{\mathcal{G}(m')}{F(t-\varepsilon)} - \frac{\mathcal{G}(m)}{F(t-\varepsilon)}\right] + \frac{1}{E}\left[\frac{\mathcal{G}(n')}{F(t+\varepsilon)} - \frac{\mathcal{G}(n)}{F(t-\varepsilon)}\right] = 0.$$

Faisons tendre ε vers zéro. Comme l'énergie interne U est une fonction continue, chacun des deux premiers termes entre crochets tend vers zéro, et il reste

$$\operatorname{Lim}[\mathcal{G}(m') - \mathcal{G}(m)] = \operatorname{Lim}[\mathcal{G}(n') - \mathcal{G}(n)].$$

Lors donc que la température, en croissant, passe par la valeur t, la fonction $\mathcal{G}$ augmente d'une quantité C (qui peut être 0) indépendante des valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ au point où l'espace D a été traversé, à moins qu'en ce point les équations (6) ne soient toutes vérifiées.

Mais à la fonction $\mathcal{G}$ on peut toujours ajouter, sans manquer à aucune des conditions auxquelles elle doit satisfaire, une fonction arbitraire de la température, continue ou discontinue. En particulier, nous pouvons ajouter à la fonction $\mathcal{G}$ une fonction de la température, discontinue en tout point de l'espace D, et croissant brusquement de

$(-C)$ lorsque $\mathfrak{S}$, en croissant, passe par la valeur t. La nouvelle fonction $\mathcal{G}$ variera alors d'une manière continue lorsque le point figuratif traversera l'espace D, à moins que cet espace ne contienne un domaine fini, à $(n-1)$ dimensions, en tout point duquel les égalités (8) seraient vérifiées.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

On peut toujours supposer que la fonction $\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S})$ *qui figure dans les égalités* (5) *est une fonction continue et uniforme des variables* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}$, *pourvu que l'on exclue du champ de variation de ces variables tout domaine à* $(n-1)$ *dimensions, d'étendue finie, en tout point duquel les équations*

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S} = \text{const.}, \\ R_\alpha = 0, \quad R_\beta = 0, \quad \ldots, \quad R_\lambda = 0, \end{cases}$$

seraient simultanément vérifiées.

Ce n'est que par une HYPOTHÈSE que nous pouvons nous débarrasser de cette dernière restriction et dire :

En toutes circonstances, on peut supposer la fonction $\mathcal{G}$ *continue et uniforme dans tout l'espace des* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}$.

5. *Emploi du cycle de Carnot élémentaire.* — Considérons, dans l'espace des $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}$, un point où l'on n'ait pas les $(n-1)$ égalités

$$(5) \qquad R_\alpha = 0, \quad R_\beta = 0, \quad \ldots, \quad R_\lambda = 0.$$

Admettons qu'*au voisinage de ce point les fonctions* $R_\alpha, R_\beta, \ldots, R_\lambda$, C *soient continues et admettent des dérivées partielles.* Alors, au voisinage du point considéré, la fonction $\mathcal{G}$ est certainement continue et uniforme ; en outre, l'équation

$$R_\alpha\, d\alpha + R_\beta\, d\beta + \ldots + R_\lambda\, d\lambda + C\, d\mathfrak{S} = 0$$

n'a pas pour conséquence

$$d\mathfrak{S} = 0,$$

en sorte que, par le point considéré et par les points voisins, on peut mener au moins une ligne adiabatique réversible qui ne soit pas une ligne isothermique et ne soit pas tangente à une ligne isothermique.

Soit $1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S})$ le point considéré. Par ce point menons une isothermique réversible 1-2 qui nous amène au point infiniment voisin $2(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \mathfrak{S})$. Soit $\mathfrak{S}'$ une température infiniment voisine de $\mathfrak{S}$. Par le point 1 menons (ce qui est possible) une adiabatique réversible 1-1' le long de laquelle on n'ait pas $d\mathfrak{S} = 0$. Sur cette adiabatique se trouve un point

$$1'(\alpha'_1, \beta'_1, \ldots, \lambda'_1, \mathfrak{S}),$$

infiniment voisin du point 1 où la température est $\mathfrak{S}'$. De même, par le point 2, menons une adiabatique réversible 2-2', le long de laquelle on n'ait pas $d\mathfrak{S} = 0$. Sur cette adiabatique se trouve un point

$$2'(\alpha'_2, \beta'_2, \ldots, \lambda'_2, \mathfrak{S}'),$$

infiniment voisin du point 2, où la température est $\mathfrak{S}'$. Relions les points 1', 2' par une isothermique réversible 1'-2'.

Le cycle 1-2-2'-1'-1 est un cycle de Carnot réversible auquel on peut appliquer l'égalité (1).

Cette égalité nous donnera l'égalité

$$\frac{R_{\alpha_1}(\alpha_2 - \alpha_1) + R_{\beta_1}(\beta_2 - \beta_1) + \ldots + R_{\lambda_1}(\lambda_2 - \lambda_1)}{F(\mathfrak{S})} - \frac{R'_{\alpha_1}(\alpha'_2 - \alpha'_1) + R'_{\beta_1}(\beta'_2 - \beta'_1) + \ldots + R'_{\lambda_1}(\lambda'_2 - \lambda'_1)}{F(\mathfrak{S}')} = 0,$$

égalité dans laquelle

$$R_{\alpha_1} = R_\alpha(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$R'_{\alpha_1} = R_\alpha(\alpha'_1, \beta'_1, \ldots, \lambda'_1, \mathfrak{S}'),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au second,

l'égalité précédente peut s'écrire

$$
(9)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\dfrac{dF(\mathfrak{S})}{d\mathfrak{S}}\left[R_{\alpha_1}(\alpha_2-\alpha_1)+R_{\beta_1}(\beta_2-\beta_1)+\ldots+R_{\lambda_1}(\lambda_2-\lambda_1)\right](\mathfrak{S}'-\mathfrak{S})}{[F(\mathfrak{S})]^2}\\
&-\frac{\left[\dfrac{\partial R_{\alpha_1}}{\partial\mathfrak{S}}(\alpha_2-\alpha_1)+\dfrac{\partial R_{\beta_1}}{\partial\mathfrak{S}}(\beta_2-\beta_1)+\ldots+\dfrac{\partial R_{\lambda_1}}{\partial\mathfrak{S}}(\lambda_2-\lambda_1)\right](\mathfrak{S}'-\mathfrak{S})}{F(\mathfrak{S})}\\
&-\frac{1}{F(\mathfrak{S})}\left\{\left[\frac{\partial R_{\alpha_1}}{\partial\alpha_1}(\alpha'_1-\alpha_1)+\frac{\partial R_{\alpha_1}}{\partial\beta_1}(\beta'_1-\beta_1)+\ldots+\frac{\partial R_{\alpha_1}}{\partial\lambda_1}(\lambda'_1-\lambda_1)\right](\alpha_2-\alpha_1)\right.\\
&\qquad+\left[\frac{\partial R_{\beta_1}}{\partial\alpha_1}(\alpha'_1-\alpha_1)+\frac{\partial R_{\beta_1}}{\partial\beta_1}(\beta'_1-\beta_1)+\ldots+\frac{\partial R_{\beta_1}}{\partial\lambda_1}(\lambda'_1-\lambda_1)\right](\beta_2-\beta_1)\\
&\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\left.+\left[\frac{\partial R_{\lambda_1}}{\partial\alpha_1}(\alpha'_1-\alpha_1)+\frac{\partial R_{\lambda_1}}{\partial\beta_1}(\beta'_1-\beta_1)+\ldots+\frac{\partial R_{\lambda_1}}{\partial\lambda_1}(\lambda'_1-\lambda_1)\right](\lambda_2-\lambda_1)\right\}\\
&-\frac{1}{F(\mathfrak{S})}\left[R_{\alpha_1}(\alpha'_2-\alpha'_1-\alpha_2+\alpha_1)+R_{\beta_1}(\beta'_2-\beta'_1-\beta_2+\beta_1)+\ldots\right.\\
&\qquad\qquad\left.+R_{\lambda_1}(\lambda'_2-\lambda'_1-\lambda_2+\lambda_1)\right]=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Mais, d'autre part, en écrivant que les lignes (1–1′), (2–2′) sont des adiabatiques réversibles, nous trouvons

$$R_{\alpha_1}(\alpha'_1-\alpha_1)+R_{\beta_1}(\beta'_1-\beta_1)+\ldots+R_{\lambda_1}(\lambda'_1-\lambda_1)+C_1(\mathfrak{S}'-\mathfrak{S})=0,$$
$$R_{\alpha_2}(\alpha'_2-\alpha_2)+R_{\beta_2}(\beta'_2-\beta_2)+\ldots+R_{\lambda_2}(\lambda'_2-\lambda_2)+C_2(\mathfrak{S}'-\mathfrak{S})=0.$$

En retranchant la première égalité de la seconde et en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au second, nous trouvons

$$
(10)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial R_{\alpha_1}}{\partial\alpha_1}(\alpha'_2-\alpha'_1)+\frac{\partial R_{\alpha_1}}{\partial\beta_1}(\beta_2-\beta'_1)+\ldots+\frac{\partial R_{\alpha_1}}{\partial\lambda_1}(\lambda_2-\lambda_1)\right](\alpha'_1-\alpha_1)\\
&+\left[\frac{\partial R_{\beta_1}}{\partial\alpha_1}(\alpha'_2-\alpha'_1)+\frac{\partial R_{\beta_1}}{\partial\beta_1}(\beta'_2-\beta'_1)+\ldots+\frac{\partial R_{\beta_1}}{\partial\lambda_1}(\lambda'_2-\lambda'_1)\right](\beta'_1-\beta_1)\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\left[\frac{\partial R_{\lambda_1}}{\partial\alpha_1}(\alpha'_2-\alpha'_1)+\frac{\partial R_{\lambda_1}}{\partial\beta_1}(\beta_2-\beta'_1)+\ldots+\frac{\partial R_{\lambda_1}}{\partial\lambda_1}(\lambda'_2-\lambda_1)\right](\lambda'_1-\lambda_1)\\
&+R_{\alpha_1}(\alpha'_2-\alpha_2-\alpha'_1+\alpha_1)+R_{\beta_1}(\beta'_2-\beta_2-\beta'_1+\beta_1)+\ldots\\
&\qquad+R_{\lambda_1}(\lambda'_2-\lambda_2-\lambda'_1+\lambda_1)\\
&+\left[\frac{\partial C_1}{\partial\alpha_1}(\alpha_2-\alpha_1)+\frac{\partial C_1}{\partial\beta_1}(\beta_2-\beta_1)+\ldots+\frac{\partial C_1}{\partial\lambda_1}(\lambda_2-\lambda_1)\right](\mathfrak{S}'-\mathfrak{S})=0.
\end{aligned}
\right.
$$

La comparaison des égalités (9) et (10) donne immédiatement l'égalité

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{F(\Xi)}\frac{\partial C_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial}{\partial \Xi}\frac{R_{\alpha_1}}{F(\Xi)}\right](\alpha_2 - \alpha_1) \\ +&\left[\frac{1}{F(\Xi)}\frac{\partial C_1}{\partial \beta_1} - \frac{\partial}{\partial \Xi}\frac{R_{\beta_1}}{F(\Xi)}\right](\beta_2 - \beta_1) \\ +&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +&\left[\frac{1}{F(\Xi)}\frac{\partial C_1}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial}{\partial \Xi}\frac{R_{\lambda_1}}{F(\Xi)}\right](\lambda_2 - \lambda_1) = 0. \end{aligned}$$

Mais $(\alpha_2 - \alpha_1)$, $(\beta_2 - \beta_1)$, ..., $(\lambda_2 - \lambda_1)$ sont des quantités infiniment petites arbitraires, en sorte que les coefficients de ces binomes doivent être tous nuls. En supprimant l'indice 1, désormais inutile, on peut énoncer le théorème suivant :

En tout état $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \Xi)$ *du système où les* $(n-1)$ *égalités*

(6) $$R_\alpha = 0, \qquad R_\beta = 0, \qquad \ldots \qquad R_\lambda = 0$$

ne sont pas simultanément vérifiées, on a les relations

(11) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{F(\Xi)}\frac{\partial C}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \Xi}\frac{R_\alpha}{F(\Xi)} = 0, \\ &\frac{1}{F(\Xi)}\frac{\partial C}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \Xi}\frac{R_\beta}{F(\Xi)} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{1}{F(\Xi)}\frac{\partial C}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \Xi}\frac{R_\lambda}{F(\Xi)} = 0. \end{aligned}\right.$$

Si nous supposons continues les dérivées partielles des coefficients calorifiques R_α, R_β, ..., R_λ, C, nous voyons sans peine que *les égalités* (11) *sont exactes en tout point de l'espace à* n *dimensions des* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \Xi$, *à moins que cet espace ne renferme un domaine d'étendue finie, à* n *dimensions, en tout point duquel les égalités* (5) *sont vérifiées.*

C'est seulement par voie d'HYPOTHÈSE que cette dernière restric-

tion peut être levée et que nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Les égalités (11) *sont exactes en tout point de l'espace à n dimensions des* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}$.

On voit alors que, *s'il existe un domaine à n dimensions en tout point duquel les égalités* (5) *sont vérifiées*, on a aussi, en tout point de ce domaine,

$$(12) \qquad \frac{\partial C}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial C}{\partial \beta} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial C}{\partial \lambda} = 0,$$

et *la capacité calorifique C est, en ce domaine, fonction de la seule température* $\mathfrak{S}$.

6. *Potentiel thermodynamique interne et entropie.* — Les égalités (3), jointes aux égalités (5), nous permettent d'écrire

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} E\dfrac{R_\alpha}{F(\mathfrak{S})} = \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\dfrac{EU - \mathcal{G}}{F(\mathfrak{S})}, \\ E\dfrac{R_\beta}{F(\mathfrak{S})} = \dfrac{\partial}{\partial \beta}\dfrac{EU - \mathcal{G}}{F(\mathfrak{S})}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ E\dfrac{R_\lambda}{F(\mathfrak{S})} = \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\dfrac{EU - \mathcal{G}}{F(\mathfrak{S})}. \end{array} \right.$$

D'ailleurs, les égalités (11) et (13) donnent

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} E\dfrac{\partial}{\partial \alpha}\dfrac{C}{F(\mathfrak{S})} = \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left(\dfrac{\partial}{\partial \mathfrak{S}}\dfrac{EU - \mathcal{G}}{F(\mathfrak{S})}\right), \\ E\dfrac{\partial}{\partial \beta}\dfrac{C}{F(\mathfrak{S})} = \dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(\dfrac{\partial}{\partial \mathfrak{S}}\dfrac{EU - \mathcal{G}}{F(\mathfrak{S})}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ E\dfrac{\partial}{\partial \lambda}\dfrac{C}{F(\mathfrak{S})} = \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\left(\dfrac{\partial}{\partial \mathfrak{S}}\dfrac{EU - \mathcal{G}}{F(\mathfrak{S})}\right). \end{array} \right.$$

Ces égalités nous enseignent que les deux fonctions uniformes et

continues $\frac{EC}{F(\mathfrak{S})}$ et $\frac{\partial}{\partial \mathfrak{S}} \frac{EU - \mathcal{G}}{F(\mathfrak{S})}$ ne diffèrent l'une de l'autre que par une fonction uniforme et continue de la seule variable $\mathfrak{S}$, $\varphi(\mathfrak{S})$:

$$E \frac{C}{F(\mathfrak{S})} = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{S}} \frac{EU - \mathcal{G}}{F(\mathfrak{S})} + \varphi(\mathfrak{S}). \tag{15}$$

Déterminons une fonction uniforme et continue de $\mathfrak{S}$, $\Psi(\mathfrak{S})$, par la condition

$$\frac{d}{d\mathfrak{S}} \frac{\Psi(\mathfrak{S})}{F(\mathfrak{S})} = -\varphi(\mathfrak{S}),$$

et posons

$$\mathcal{F} = \mathcal{G} + \Psi(\mathfrak{S}), \tag{16}$$

ainsi que

$$-ES = \frac{\mathcal{F} - EU}{F(\mathfrak{S})}. \tag{17}$$

Les deux fonctions $\mathcal{F}$ *et* S *sont deux fonctions continues et uniformes de* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}$. La fonction $\mathcal{F}$ se nomme le *potentiel thermodynamique interne du système* et la fonction S l'*entropie* du système.

En vertu de l'égalité (16), les égalités (5) peuvent s'écrire

$$f_\alpha = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}, \quad f_\beta = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}, \quad \ldots, \quad f_\lambda = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}. \tag{18}$$

En vertu des égalités (13), (15), (16) et (17), on a

$$\frac{R_\alpha}{F(\mathfrak{S})} = \frac{\partial S}{\partial \alpha}, \quad \frac{R_\beta}{F(\mathfrak{S})} = \frac{\partial S}{\partial \beta}, \quad \ldots, \quad \frac{R_\lambda}{F(\mathfrak{S})} = \frac{\partial S}{\partial \lambda}, \tag{19}$$

$$\frac{C}{F(\mathfrak{S})} = \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}}. \tag{20}$$

D'après les égalités (19) et (20), toutes les dérivées partielles de l'entropie sont déterminées; *l'entropie d'un système donné est donc déterminée à une constante additive près.* On sait qu'il en est de

même de l'énergie interne. Dès lors, comme l'égalité (17) peut s'écrire

$$\mathcal{F} = \mathrm{E}[\mathrm{U} - \mathrm{F}(\mathfrak{z})\mathrm{S}], \tag{17 bis}$$

on voit que *l'indétermination du potentiel thermodynamique consiste en ce qu'on peut toujours ajouter à cette fonction une quantité de la forme*

$$\mathrm{A} + \mathrm{BF}(\mathfrak{z}),$$

où A *et* B *sont deux constantes arbitraires.*

7. *L'égalité de Clausius.* — Soit dQ la quantité de chaleur dégagée dans une modification réversible infiniment petite; les égalités (19) et (20), jointes à l'égalité

$$dQ = -(\mathrm{R}_\alpha d\alpha + \mathrm{R}_\beta d\beta + \ldots + \mathrm{R}_\lambda d\lambda - \mathrm{C}d\mathfrak{z}),$$

donnent

$$\frac{dQ}{\mathrm{F}(\mathfrak{z})} + d\mathrm{S} = 0. \tag{21}$$

La fonction S étant continue et uniforme, on en conclut que l'*on a, pour tout cycle réversible, l'égalité*

$$\int \frac{dQ}{\mathrm{F}(\mathfrak{z})} = 0. \tag{22}$$

C'est l'égalité de Clausius, que nous nous proposions d'établir.

Réduction des intégrales multiples généralisées;

PAR M. CH.-J. DE LA VALLÉE-POUSSIN.

I. — Définitions et objet du Mémoire.

1. J'ai publié en 1892, dans ce même Journal, un Mémoire étendu dans lequel j'ai étudié les propriétés des intégrales généralisées de fonctions illimitées. J'y ai recherché sous quelles conditions l'intégrale double étendue à une aire T

$$\mathrm{S}_{\mathrm{T}} f(x, y)\, d\mathrm{T}$$

est réductible à deux intégrales généralisées simples, consécutives, entre les limites de T.

Le cas le plus intéressant, les autres s'y ramènent d'ailleurs, est celui où la fonction $f(x, y)$ est toujours de même signe. Dans ce cas, moyennant une restriction (vérifiée dans toutes les applications que je connaisse), la condition nécessaire et suffisante pour que la réduction soit possible est qu'elle conduise à un résultat déterminé.

J'ai cherché à supprimer toute restriction à ce théorème : je n'y suis pas parvenu; mais la méthode nouvelle que je vais exposer conduit à des résultats plus généraux que celui-là. Il me paraît intéressant de les faire connaître, car ils jettent une certaine lumière sur une question importante et conduisent, en tous cas, à une solution générale du problème de la réduction des intégrales doubles.

2. Avant de préciser le résultat principal de cette étude, je dois rappeler les définitions des intégrales généralisées telles que je les ai données dans mon premier Mémoire.

A cet effet, j'associe à la fonction f à intégrer, supposée toujours positive, une fonction f_n définie comme il suit :

$$f_n = f \qquad \text{si} \qquad f \leqq n;$$
$$f_n = n \qquad \text{si} \qquad f \geqq n.$$

Je pose ensuite, par définition, l'intervalle (a, b) et l'aire T étant limités.

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$
$$\lim_{n=\infty} \mathbf{S}_{\mathrm{T}} f_n(x, y)\,d\mathrm{T} = \mathbf{S}_{\mathrm{T}} f(x, y)\,d\mathrm{T}.$$

3. Ces relations ne sont bien déterminées que si la fonction $f_n(x)$ ou la fonction $f_n(x, y)$ sont intégrables, l'une dans l'intervalle (a, b) et l'autre dans l'aire T, quel que soit n. Dans le cas contraire, il y a une *intégrale par défaut* et une *intégrale par excès*, toutes les deux bien déterminées; je les représente par

$$\overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} f_n(x)\,dx, \quad \overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} f_n(x)\,dx;$$
$$\overset{\mathrm{D}}{\mathbf{S}}_{\mathrm{T}} f_n(x, y)\,d\mathrm{T}, \qquad \overset{\mathrm{E}}{\mathbf{S}}_{\mathrm{T}} f_n(x, y)\,d\mathrm{T}.$$

Les intégrales par défaut et par excès de la fonction illimitée f seront par définition les limites de celles-là quand n tendra vers l'infini; celles-ci seront donc déterminées ou infinies. On aura, par exemple,

$$\overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} f_n(x)\,dx,$$
$$\overset{\mathrm{E}}{\mathbf{S}} f(x, y)\,d\mathrm{T} = \lim_{n=\infty} \overset{\mathrm{E}}{\mathbf{S}}_{\mathrm{T}} f_n(x, y)\,d\mathrm{T}.$$

4. J'appelle *discontinuité* de $f(x)$ au point x la limite de l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle infiniment petit $(x-\delta, x+\delta)$ et je la représente par

$$\operatorname{disc} f(x).$$

De même, la discontinuité de $f(x, y)$ est la limite de l'oscillation de f dans une aire infiniment petite autour du point (x, y); je la désigne par

$$\operatorname{disc} f(x, y).$$

La discontinuité sera le plus souvent différente, si l'on considère $f(x, y)$ comme fonction de x seul ou de y seul; je représente ces deux *discontinuités partielles* par

$$\operatorname{disc}_x f(x, y), \quad \operatorname{disc}_y f(x, y).$$

Il résulte évidemment de cette définition de la discontinuité que la fonction $\operatorname{disc} f(x)$ est une fonction qui atteint sa limite supérieure dans tout intervalle.

5. *Définition de la fonction mf.* — La méthode que nous allons exposer repose sur les propriétés d'une fonction mf liée à la fonction f par les définitions suivantes :

1° Si $f(x)$ dépend d'une seule variable x,

$$mf(x)$$

désigne le minimum de $f(x)$ dans un intervalle infiniment petit comprenant le point x.

2° Si $f(x, y)$ dépend de deux variables x et y,

$$mf(x, y)$$

désigne le minimum de $f(x, y)$ dans une aire infiniment petite autour de (x, y).

6. *Réduction des intégrales doubles.* — La fonction mf permet de résoudre, dans le cas général, le problème de la réduction des inté-

grales doubles. Nous allons démontrer en effet que si, $f(x, y)$ étant $\geqq 0$, l'intégrale double

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f(x, y)\, d\mathrm{T}$$

a une valeur déterminée : *elle est toujours égale au résultat de deux intégrations simples par défaut sur $m f(x y)$, effectuées, entre les limites de l'aire* T. Ainsi, si cette aire est limitée par les valeurs a et b de x et c et d de y, on aura

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f(x, y)\, d\mathrm{T} = \int_a^{\mathrm{D}\, b} dx \int_c^{\mathrm{D}\, d} m f\, dy = \int_c^{\mathrm{D}\, d} dy \int_a^{\mathrm{D}\, b} m f\, dx.$$

Ce théorème s'étend aux intégrales d'un ordre quelconque.

II. — Propriétés des fonctions mf.

7. *Propriétés de la fonction $m f$ d'une seule variable.* — En désignant par $f(x)$ une fonction quelconque de x, la nouvelle fonction

$$m f(x)$$

jouit des propriétés suivantes :

1° Elle atteint sa limite inférieure dans tout intervalle (a, b) et cette limite est la même que celle de $f(x)$ dans l'intervalle $(a - 0, b + 0)$. Seulement cette limite peut être inaccessible pour $f(x)$.

2° Supposons que f soit $\geqq 0$ et puisse croître indéfiniment dans l'intervalle (a, b); décomposons l'intervalle (a, b) en intervalles infiniment petits Δx_i par les points $x_1, x_2, \ldots$; soit ξ_i le point de l'intervalle Δx_i où $m f$ atteint son minimum; on aura, l'intégrale étant prise par défaut,

$$\int_a^{\mathrm{D}\, b} f(x)\, dx = \lim \sum_i m f(\xi_i)\, \Delta x_i.$$

D'une part, en effet, on a, quel que soit n,

$$\int_a^{\mathrm{D}\, b} f_n(x)\, dx > \sum m f_n(\xi_i)\, \Delta x_i,$$

donc, pour n infini,

$$\overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} f(x)\,dx \geqq \sum m f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

et, en faisant tendre les Δx vers o,

$$\overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} f(x)\,dx \geqq \lim \sum m f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

D'autre part, les Δx tendant vers zéro, on a

$$\overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} f_n(x)\,dx = \lim \sum m f_n(\xi_i)\,\Delta x_i \leqq \lim \sum m f(\xi_i)\,\Delta x_i;$$

donc, en faisant tendre n vers l'infini, et en ayant égard à l'inégalité obtenue d'abord,

$$\overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim \sum m f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Si au lieu de choisir les points ξ_i comme nous venons de le faire, on les prenait arbitrairement dans l'intervalle Δx_i, on aurait donc

$$\overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \lim \sum m f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

8. *Propriétés de la fonction mf de deux variables.* — Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables x et y dans un domaine T rectangulaire, limité par les valeurs a et b de x et c et d de y; la nouvelle fonction

$$m f(x, y)$$

atteindra sa limite inférieure dans toute portion de l'aire T et elle jouira, en outre, des propriétés suivantes :

1° En tout point (α, β) où mf est finie, on peut, quelque petit que soit ε, lui faire correspondre un nombre δ tel que la condition

$$m f(\alpha + h, \beta + k) - m f(\alpha, \beta) > -\varepsilon$$

ait lieu, pourvu que $|h|$ et $|k|$ soient $< \delta$.

C'est une conséquence de la définition de mf, car, si cette condition ne se réalisait pas, $mf(\alpha, \beta)$ ne serait pas la limite inférieure de $mf(x, y)$ ni, par suite, celle de $f(x, y)$ dans une aire infiniment petite autour de (α, β).

2° Si la fonction $mf(x, \beta)$ est limitée quand x varie dans l'intervalle (a, b), à tout nombre ε correspond un nombre δ assez petit pour qu'on ait, quel que soit x,

$$mf(x, \beta + k) - mf(x, \beta) > -\varepsilon - \operatorname{disc}_x mf(x + \theta\varepsilon, \beta)$$
$$(-1 < \theta < 1),$$

pourvu que l'on ait $|k| < \delta$.

Si cette condition ne se réalisait pas dans l'intervalle (a, b), cet intervalle contiendrait au moins un point X tel que la condition ne se réalisât pas non plus dans un au moins des deux intervalles arbitrairement petits $(X - \delta, X)$ ou $(X, X + \delta)$, par exemple dans le second. Mais ceci est faux, car on peut d'abord supposer δ assez petit pour que les deux inégalités

$$mf(x, \beta) - mf(X, \beta) < \operatorname{disc}_x mf(X, \beta) + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$mf(x, \beta + k) - mf(X, \beta) > -\frac{\varepsilon}{2}$$

aient lieu, pourvu que $|x - X|$ et $|k|$ soient $< \delta$, l'une par la définition de la discontinuité au point X, l'autre en vertu de la propriété 1°. Cela fait, on aura, pour toute valeur de x dans l'intervalle $(X, X + \delta)$,

$$mf(x, \beta + k) - mf(x, \beta) > -\varepsilon - \operatorname{disc}_x mf(X, \beta).$$

Ce résultat contredit notre hypothèse, dès que δ devient $< \varepsilon$, car X peut alors se représenter par $x + \theta\varepsilon$.

3° Soient A et B deux nombres > 0, si $mf(x, \beta)$ est constamment $>$ A dans l'intervalle (a, b) de x, on peut supposer δ assez petit pour qu'on ait aussi dans cet intervalle

$$mf(x, \beta + k) > A - B,$$

pourvu qu'on ait $|k| < \delta$.

En effet, si la relation opposée $mf(x, \beta + k) \leq A - B$ pouvait se véri-

fier pour des valeurs infiniment petites de k, les valeurs correspondantes de x auraient au moins un point limite ξ où l'on aurait

$$m f(\xi, \beta) \leqq A - B,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

III. — Théorèmes fondamentaux.

9. Avant d'énoncer le théorème qui va jouer le rôle essentiel dans mon analyse, je dois encore démontrer le lemme suivant :

Soient $\varphi(x)$ une fonction limitée dans l'intervalle (a, b) et θ une fonction de x qui varie d'une manière arbitraire entre -1 et $+1$; on aura

$$\lim_{\varepsilon=0} \overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} \operatorname{disc} \varphi(x + \theta\varepsilon)\, dx \leqq \overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} \operatorname{disc} \varphi(x)\, dx.$$

Soit d'abord η un nombre arbitrairement petit; décomposons (a, b) en intervalles successifs Δx_i par les points $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$; soit ξ_i le point où $\operatorname{disc}\varphi(x)$ atteint son maximum dans l'intervalle Δx_i; on peut supposer tous ces intervalles suffisamment petits pour qu'on ait

$$\overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} \operatorname{disc} \varphi(x)\, dx \geqq \sum \operatorname{disc} \varphi(\xi_i)\, \Delta x_i - \eta.$$

D'ailleurs on peut toujours admettre que ξ_i désigne une des limites de l'intervalle Δx_i, car cette condition se réalisera toujours en ajoutant les points ξ_i aux premiers points de subdivision.

Les points x_i étant en nombre limité, on peut aussi supposer que ε est assez petit pour que l'on ait en chacun de ces points

$$\operatorname{disc} \varphi(x_i + \theta\varepsilon) \leqq \operatorname{disc} \varphi(x_i) + \eta.$$

Cela fait, le maximum de $\operatorname{disc} \varphi(x + \theta\varepsilon)$ dans l'intervalle Δx_i ne pourra surpasser la quantité

$$\operatorname{disc} \varphi(\xi_i) + \eta,$$

et l'on aura, par conséquent,

$$\int_a^{\mathrm{E}\,b} \operatorname{disc} \varphi(x+\theta\varepsilon)\,dx = \sum \operatorname{disc} \varphi(\xi_i)\,\Delta x_i + \eta(b-a)$$
$$= \int_a^{\mathrm{E}\,b} \operatorname{disc} \varphi(x)\,dx + \eta + \eta(b-a).$$

Le nombre η étant aussi petit que l'on veut, le lemme est démontré. Voici maintenant mon théorème fondamental.

10. Théorème. — *Si l'intégrale par défaut*

$$\int_a^{\mathrm{D}\,b} m f(x, \beta)\,dx$$

n'est pas infinie, à tout nombre positif ε *correspondent un nombre* n *et un nombre* δ *tels qu'on ait, pour* $|k| < \delta$,

$$\int_a^{\mathrm{E}\,b} m f_n(x, \beta+k)\,dx > \int_a^{\mathrm{D}\,b} m f(x, \beta)\,dx - \varepsilon,$$

et cette relation subsiste a fortiori *pour les valeurs plus grandes de* n.

Choisissons d'abord n assez grand pour qu'on ait

$$(1) \qquad \int_a^{\mathrm{D}\,b} m f_n(x, \beta)\,dx > \int_a^{\mathrm{D}\,b} m f(x, \beta)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Choisissons maintenant un nombre ε' assez petit pour qu'on ait, θ désignant une fonction arbitraire comprise entre -1 et $+1$,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_a^{\mathrm{E}\,b} \operatorname{disc}_x m f_n(x+\theta\varepsilon', \beta)\,dx + \varepsilon'(b-a) \\ &\quad < \int_a^{\mathrm{E}\,b} \operatorname{disc}_x m f_n(x, \beta)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}; \end{aligned} \right.$$

cette condition peut se réaliser, en vertu du lemme du n° 9 qui précède.

Enfin, on peut prendre δ suffisamment petit pour qu'on ait constamment, pourvu que $|k|$ soit $< \delta$ (nº **8**, 2º),

$$m f_n(x, \beta + k) - m f_n(x, \beta) > -\varepsilon - \operatorname{disc}_x m f_n(x + \theta\varepsilon', \beta).$$

On conclut de cette relation

$$\begin{aligned} &{}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b m f_n(x, \beta + k)\, dx \\ &\qquad \geqq {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b \left[m f_n(x, \beta) - \operatorname{disc}_x m f_n(x + \theta\varepsilon', \beta) - \varepsilon' \right] dx, \end{aligned}$$

et *a fortiori* [puisque $\max(\mathrm{A} - \mathrm{B}) \geqq \max \mathrm{A} - \max \mathrm{B}$]

$$\begin{aligned} &{}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b m f_n(x, \beta + k)\, dx \\ &\qquad \geqq {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b m f_n(x, \beta)\, dx - {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b \operatorname{disc}_x m f_n(x + \theta\varepsilon', \beta)\, dx - \varepsilon'(b - a), \end{aligned}$$

enfin, *a fortiori*, en vertu de l'inégalité (2),

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &{}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b m f_n(x, \beta + k)\, dx \\ &\qquad \geqq {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b m f_n(x, \beta)\, dx - {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b \operatorname{disc}_x m f_n(x, \beta)\, dx - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \right.$$

Ajoutons les inégalités (1) et (3) et observons que

$${}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b m f_n(x, \beta)\, dx - {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b \operatorname{disc}_x m f_n(x, \beta)\, dx = {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b m f_n(x, \beta)\, dx,$$

nous obtiendrons l'inégalité du théorème.

11. Théorème. — *Réciproquement, si l'intégrale par défaut*

$${}^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b m f(x, \beta)\, dx = \infty,$$

on aura, k et n tendant arbitrairement vers leurs limites,

$$\lim_{\substack{k=0 \\ n=\infty}} \int_a^b m f_n(x, \beta + k)\, dx = \infty.$$

Soient, en effet, H et K deux nombres arbitrairement grands; divisons l'intervalle (a, b) en p parties par les points $x_1, x_2, \ldots$; soit Δx_i un de ces intervalles et A_i le minimum de $m f(x, \beta)$ dans cet intervalle (si ce minimum était infini, A_i serait un nombre fini arbitraire). On peut supposer p assez grand pour qu'on ait

$$\sum A_i \Delta x_i > H + K;$$

ensuite on peut prendre δ assez petit pour que l'on ait, dans chaque intervalle Δx_i de x, pourvu que $|k|$ soit $< \delta$,

$$m f(x, \beta + k) > A_i - \frac{K}{b-a},$$

comme on l'a vu au n° **8**, 3°.

Cela fait, pourvu que n soit supérieur à la plus grande des quantités A_i, on aura, dans les mêmes conditions,

$$m f_n(x, \beta + k) > A_i - \frac{K}{b-a};$$

donc

$$\int_a^b m f_n(x, \beta + k)\, dx > \sum A_i \Delta x_i - K > H.$$

Cette relation, où H est arbitraire, se vérifiant pour n assez grand et δ assez petit, le théorème en résulte.

12. Théorème. — *Soit β_n le point où la fonction de y*

$$m \int_a^{\mathrm{E}\, b} m f_n(x, y)\, dx$$

atteint son minimum dans l'intervalle (c, d); on peut faire tendre

en même temps β_n *vers une limite déterminée* β *et* n *vers l'infini : on aura*

$$\lim_{n=\infty} m \,{}^{E}\!\!\int_a^b m f_n(x, \beta_n)\, dx \overline{\geqq}\, {}^{D}\!\!\int_a^b m f(x, \beta)\, dx.$$

Si le second membre est infini, le premier le sera aussi en vertu du théorème précédent; supposons-le donc fini et déterminé.

Dans ce cas, quelque petit que soit ε, le théorème avant-précédent donnera, pour n suffisamment grand et $|\beta_n - \beta| < \delta$,

$$m \,{}^{E}\!\!\int_a^b m f_n(x, \beta_n)\, dx \overline{\geqq}\, {}^{D}\!\!\int_a^b m f(x, \beta)\, dx - \varepsilon.$$

On peut faire tendre à la fois n vers l'infini et ε vers zéro; à la limite, on obtient la relation à démontrer.

IV. — Réduction des intégrales doubles.

15. Théorème. — *Si la fonction* $f(x, y)$ *n'est jamais négative dans le rectangle* T, *limité par les valeurs* a *et* b *de* x *et* c *et* d *de* y, *l'expression*

$${}^{D}\!\!\int_c^d dy \,{}^{D}\!\!\int_a^b m f(x, y)\, dx$$

est comprise entre les limites d'indétermination de l'intégrale double

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f(x, y)\, d\mathrm{T}.$$

D'une part, en effet, on a

$${}^{D}\mathbf{S}_{\mathrm{T}} f_n\, d\mathrm{T} = {}^{D}\mathbf{S}_{\mathrm{T}} m f_n\, d\mathrm{T} \overline{\geqq}\, {}^{D}\!\!\int_c^d dy \,{}^{D}\!\!\int_a^b m f_n\, dx.$$

Donc, en faisant tendre n vers l'infini, et puisque f est au moins

égal à f_n.

(1) $$\overset{\mathrm{D}}{\mathrm{S}}_{\mathrm{T}} f\,d\mathrm{T} \leqq \lim_{n=\infty} {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_c^d dy\, {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b m f_n\,dx = {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_c^d dy\, {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b m f\,dx.$$

D'autre part, divisons (c, d) en intervalles consécutifs Δy_i par les points $y_1, y_2, \ldots$, et soit $\beta_{i,n}$ le point où

$$m\, {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b m f_n(x, y)\,dx$$

atteint son minimum dans l'intervalle Δy_i; on aura

$$\overset{\mathrm{E}}{\mathrm{S}}_{\mathrm{T}} f_n\,d\mathrm{T} = {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_c^d dy\, {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b f_n\,dx = \sum \Delta y_i\, m\, {}^{\mathrm{E}}\!\!\int_a^b m f_n(x, \beta_{i,n})\,dx.$$

On peut faire tendre n vers l'infini, et en même temps, dans chaque intervalle Δy_i, le point $\beta_{i,n}$ vers une limite β_i; le théorème du n° **12** s'applique à chacun de ces intervalles; il vient donc

$$\overset{\mathrm{E}}{\mathrm{S}}_{\mathrm{T}} f\,d\mathrm{T} = \sum \Delta y_i\, {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b m f(x, \beta_i)\,dx.$$

Faisons maintenant tendre tous les intervalles Δy_i vers zéro; il viendra (n° **7**, 2°)

(2) $$\overset{\mathrm{E}}{\mathrm{S}}_{\mathrm{T}} f\,d\mathrm{T} = {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_c^d dy\, {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b m f(x, y)\,dx.$$

Des relations (1) et (2) on conclut le théorème. Celui-ci donne alors immédiatement le suivant :

14. Théorème. — *Si l'intégrale double est déterminée dans l'aire* T, *on aura*

$$\mathrm{S}\, f\,d\mathrm{T} = {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b dx\, {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_c^d m f\,dy = {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_c^d dy\, {}^{\mathrm{D}}\!\!\int_a^b m f\,dx,$$

et l'intégrale double se réduit à deux intégrales simples consécutives, effectuées par défaut, dans un ordre arbitraire.

Remarques. — Dans tous les cas où l'on a

$$\int_c^d dy \int_a^b (f - mf)\, dx = 0,$$

en particulier dans tous les cas pratiques dans lesquels la différence $f - mf$ ne diffère de zéro qu'en certains points ou sur certaines lignes rectifiables en nombre limité, on aura aussi

$$\mathrm{S}_{\mathrm{T}} f\, d\mathrm{T} = \int_c^{\mathrm{D}\, d} dy \int_a^{\mathrm{D}\, b} f\, dx,$$

et l'intégrale double se réduira à deux intégrales simples par défaut, sans qu'il soit nécessaire de modifier la fonction

Dans tous ces cas aussi, on retrouve le théorème démontré dans mon premier Mémoire et l'*on peut réduire l'intégrale double à deux intégrales simples, effectuées sur la même fonction, pourvu qu'on trouve un résultat déterminé.*

15. *Généralité du théorème.* — Le théorème du n° **14** donne une solution tout à fait générale du problème de la réduction des intégrales doubles. En effet, dans tous les cas, f peut être considéré comme la différence de deux fonctions positives et, pourvu que le domaine d'intégration T soit limité, il sera intérieur à un rectangle T' que l'on pourra prendre comme domaine d'intégration, à condition de poser $f = 0$ en dehors de T. Enfin, le cas où T serait infini se ramène au précédent par un changement de variables.

V. — Extension aux intégrales multiples quelconques.

16. Le théorème du n° **15** est général et s'applique à une intégrale multiple de n'importe quel ordre, effectué sur une fonction positive, comme nous allons l'expliquer très succinctement.

Soit une intégrale généralisée de l'ordre p

$$(1) \qquad \mathbf{S}_{\mathrm{T}_p} f(x_1, x_1, \ldots, x_p)\, d\mathrm{T}_p$$

étendue à un domaine T_p limité par les valeurs a_i et b_i de x_i ($i = 1, 2, \ldots, p$); si elle n'est pas déterminée, nous désignerons les limites d'indétermination ou les intégrales par défaut et par excès par les notations

$$(2) \qquad {}^{\mathrm{D}}\mathbf{S}_{\mathrm{T}_p} f\, d\mathrm{T}_p, \quad {}^{\mathrm{E}}\mathbf{S}_{\mathrm{T}_p} f\, d\mathrm{T}_p.$$

Soit ensuite, en chaque point mf, la limite inférieure de f dans un domaine infiniment petit autour de ce point, la valeur de l'expression

$$(3) \qquad {}^{\mathrm{D}}\!\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \, {}^{\mathrm{D}}\!\int_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots {}^{\mathrm{D}}\!\int_{a_p}^{b_p} mf\, dx_p$$

est comprise entre celles des expressions (2). En particulier, si l'intégrale (1) est déterminée, l'expression (3) lui sera égale.

On prouve le théorème, en montrant qu'il est vrai pour p variables s'il est vrai pour $(p-1)$.

La démonstration se fait alors exactement comme pour le cas de deux variables, en remplaçant dans tous les raisonnements l'intégrale simple

$$\int_a^b f\, dx$$

par une intégrale de l'ordre $(p-1)$. Il est bien inutile de la reprendre en détail.

Sur la détermination du groupe des équations numériques;

PAR M. EDMOND **MAILLET**.

I.

Nous nous proposons ici :

1° De déterminer toute une série d'équations numériques de degré premier dont le groupe est symétrique ou alterné;

2° De montrer que l'équation $x^{2\rho} \pm qx \pm q = 0$, où $2\rho - 1$ et q sont premiers, a son groupe deux fois transitif quand q est supérieur à une certaine limite fonction de ρ.

II.

THÉORÈME I. — *Soit l'équation algébrique irréductible*

$$f(x) = x^p + qA_1 x^{p-1} + \ldots + qA_{p-1} x \pm q = 0 \tag{1}$$

(*p et q nombres premiers différents ou non, p impair, A_1, ..., A_{p-1} entiers*). *On peut toujours déterminer une infinité de systèmes de valeurs des coefficients $A_1, \ldots, A_{p-1}$ de* (1), *de façon que l'équation* (1) *ait au moins $2l + 1$ racines réelles et deux racines imaginaires, et, par suite, que son groupe contienne le groupe alterné si*

$l = 1$ *quand* $p = 5$ *et si* $p - 1 - 2l < \varphi(p)$, $\varphi(p)$ *étant une fonction* u *de* p, *telle que* (¹)

$$p = \frac{(4+u)\left(4 + u \log \frac{u}{2}\right)}{4},$$

quand $p > 5$.

En effet, on sait (²) que l'équation (1) est irréductible et que son groupe G est primitif. Si cette équation a $2\lambda + 1$ racines réelles, avec $2\lambda - 1 < p$, elle aura $p - 2\lambda - 1 = 2\mu$ racines imaginaires $x_1, x_2, \ldots, x_{2\mu-1}, x_{2\mu}$, et si x_{2i-1} et x_{2i} sont conjuguées ($i \leqq \mu$), G contiendra la substitution (³)

$$U = (x_1 x_2) \ldots (x_{2\mu-1} x_{2\mu}),$$

en sorte que la classe de G est $\leqq 2\mu$: d'après un théorème connu (⁴), la classe de G étant $\geqq \varphi(p)$, si G ne contient pas le groupe alterné de p éléments, G contiendra ce groupe alterné si $1 < 2\mu < \varphi(p)$.

Cherchons à déterminer $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$, de façon que 2μ soit $< \varphi(p)$, en remarquant que $\varphi(p) > 2$, quand $p > 5$. La méthode à employer pour $p = 5$ sera la même, on fera $l = \mu - 1$.

Soient

$$(2) \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{2l} \quad \text{avec} \quad p - 1 - \varphi(p) < 2l \leqq p - 3$$

des nombres entiers réels donnés $\neq 0$, avec

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2l}.$$

Si

$$(3) \qquad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_{2l}$$

(¹) JORDAN, *Journal für Math.*, p. 248; 1875.

(²) SERRET, *Algèbre supérieure*, t. I, p. 244; 1885.

(³) *Voir* notre Note des *Mémoires du Congrès de Saint-Étienne*, 1897 (*Association française pour l'avancement des Sciences*, p. 196).

(⁴) JORDAN, *loc. cit.*

sont des nombres entiers réels > 0, posons :

$$(4)\qquad f(\alpha_1) = +\beta_1, \qquad f(\alpha_2) = -\beta_2, \qquad \ldots, \qquad f(\alpha_{2l}) = -\beta_{2l},$$

les seconds membres étant alternativement positifs et négatifs.

Si les quantités $A_1, \ldots, A_{p-1}$ sont déterminées de façon à être des entiers satisfaisant à (4), l'équation (1) aura au moins $2l+1$ racines réelles, puisque p est impair.

Or les équations (4) s'écrivent

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1^p + qA_1\alpha_1^{p-1} + \ldots + qA_{p-1}\alpha_1 \pm q = +\beta_1, \\ \alpha_2^p + qA_1\alpha_2^{p-1} + \ldots + qA_{p-1}\alpha_2 \pm q = -\beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{2l}^p + qA_1\alpha_{2l}^{p-1} + \ldots + qA_{p-1}\alpha_{2l} \pm q = -\beta_{2l}. \end{array}\right.$$

Elles permettront, en principe, de déterminer $2l$ des quantités $A_1, \ldots, A_{p-1}$ en fonction des $p-1-2l \geqq 2$ autres. Si l'on choisit ces dernières de façon que (1) ait 2μ racines imaginaires ($\mu > 0$) et que $A_1, \ldots, A_{p-1}$ soient entiers, on aura $2\mu \leqq p-2l-1 < \varphi(p)$, et G contiendra le groupe alterné.

Proposons-nous, par exemple, de déterminer les $2l$ premiers coefficients en fonction des autres : la méthode à employer dans les autres cas sera la même.

(5) donne

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} qA_1\alpha_1^{p-1} + \ldots + qA_{2l}\alpha_1^{p-2l} = M_1 + \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ qA_1\alpha_{2l}^{p-1} + \ldots + qA_{2l}\alpha_{2l}^{p-2l} = M_{2l} - \beta_{2l}. \end{array}\right.$$

Le déterminant de ces équations est

$$\Delta = q^{2l}\begin{vmatrix} \alpha_1^{p-1}, & \alpha_1^{p-2}, & \ldots, & \alpha_1^{p-2l} \\ \alpha_2^{p-1}, & \alpha_2^{p-2}, & \ldots, & \alpha_2^{p-2l} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{2l}^{p-1}, & \alpha_{2l}^{p-2}, & \ldots, & \alpha_{2l}^{p-2l} \end{vmatrix} = q^{2l}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2l})^{p-2l}\Delta_1,$$

où

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^{2l-1}, & \alpha_1^{2l-2}, & \dots, & 1 \\ \alpha_2^{2l-1}, & \alpha_2^{2l-2}, & \dots, & 1 \\ \dots\dots, & \dots\dots, & \dots\dots & . \\ \alpha_{2l}^{2l-1}, & \alpha_{2l}^{2l-2}, & \dots, & 1 \end{vmatrix}.$$

Δ_2 étant un déterminant de Vandermonde formé du produit des quantités $\alpha_i - \alpha_j$, avec $i > j$, $i = 1, 2, \dots, 2l$, et $j = 1, 2, \dots, 2l-1$, est $\neq 0$. Donc $\Delta \neq 0$.

Les équations (6) donnent alors

$$(7) \qquad A_1 = \frac{1}{\Delta}\left[(M_1 + \beta_1)\Delta_1' - (M_2 - \beta_2)\Delta_2' + \dots\right],$$

et des expressions analogues pour $A_2, \dots, A_{2l}$, Δ_1', Δ_2', ... étant des déterminants mineurs de Δ.

On peut d'ailleurs, toujours, $A_{2l+1}, \dots, A_{p-1}$ étant des entiers arbitrairement choisis, déterminer les quantités positives $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_2$, d'une infinité de manières, de façon que l'on ait

$$(8) \qquad M_1 + \beta_1 \equiv M_2 - \beta_2 \equiv \dots \equiv M_{2l} - \beta_{2l} \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, \Delta),$$

moyennant quoi les équations (7) donneront pour $A_1, \dots, A_{2l}$ des valeurs entières. A deux systèmes distincts des valeurs $\beta_1, \dots, \beta_{2l}$ correspondront pour un même système de valeurs des quantités $\alpha_1, \dots, \alpha_{2l}$, $A_{2l+1}, \dots, A_{p-1}$ des équations (1) distinctes.

Ceci posé, il restera à déterminer les entiers arbitraires $A_{2l+1}, \dots, A_{p-1}$, en nombre $p - 1 - 2l \geqq 2$, de façon que (1) ait au moins deux racines imaginaires, moyennant quoi G contiendra le groupe alterné de p éléments.

Pour effectuer cette détermination de la manière la plus générale, on pourra recourir au théorème de Sturm. Nous nous contenterons [1]

---

[1] *Voir*, par exemple, Niewenglowski, *Algèbre*, t. II, 2e édition, p. 383-385, et p. 410.

de remarquer que, d'après des théorèmes connus, l'équation (1) aura des racines imaginaires :

1° Si le polynome

$$(9) \qquad A_{2l}x^{p-2l} + A_{2l+1}x^{p-2l-1} + \ldots + A_{p-1}x \pm 1$$

est tel que la somme du nombre des variations que lui et son transformé en $-x$ présentent (théorème de Descartes) soit $< p - 2l$;

2° Si dans le premier membre de (9) il manque un terme entre deux termes de même signe, ou plus d'un terme entre deux termes de signe quelconque (théorème des lacunes);

3° Si le polynome (9) a au moins trois coefficients consécutifs, dont le premier ne fait pas partie, et qui sont en progression géométrique;

4° Si le polynome (9) a au moins quatre coefficients consécutifs, dont le premier ne fait pas partie, et qui sont en progression arithmétique.

Et ainsi de suite.

Dans tous ces cas, (1) jouit, en effet, des mêmes propriétés, et G contient le groupe alterné.

III.

Lemme I. — *Soit V une fonction symétrique entière à coefficients entiers des racines $x_1, \ldots, x_n$ d'une équation algébrique*

$$X = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

dont les coefficients, sauf le premier qui est égal à 1, sont des entiers tous divisibles par le nombre premier q. Si V ne contient aucun terme indépendant de $x, \ldots, x_n$, on a

$$V \equiv 0 \pmod{q}.$$

En effet, appliquons, pour le calcul de V en fonction des coefficients $a_1, \ldots, a_n$ la méthode de Waring. On aura, en conservant les

notations de Serret [1].

$$\left\{\begin{array}{l} V = V_1 + A(-1)^{\alpha+\beta+\dots+\lambda} a_1^{\alpha-\beta} a_2^{\beta-\gamma} \dots a_n^{\lambda} = V_1 + P, \\ V_1 = V_2 + P_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ V_{\mu-1} = V_\mu + P_{\mu-1}, \end{array}\right.$$

où V_μ est indépendant de $x_1, \dots, x_n$.

Le terme qui occupe le premier rang dans V est $A x_1^\alpha x_2^\beta \dots x_n^\lambda$, et, d'après l'hypothèse faite sur V, $\alpha + \beta + \dots + \lambda > 0$. Donc

$$V - V_1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, q).$$

De plus, $V - V_1$ ne contenant aucun terme indépendant de $x_1, \dots, x_n$, V_1 n'en contiendra également aucun.

En continuant le raisonnement, on voit qu'il en est de même de $V_2, \dots, V_{\mu-1}$, et que $P_2, P_3, \dots$ sont $\equiv 0 \pmod q$. Donc $V_\mu = 0$.

V sera donc une fonction entière à coefficients entiers des coefficients $a_1, \dots, a_n$ ne contenant aucun terme indépendant de ces coefficients, et, par suite, sera $\equiv 0 \pmod q$.

Lemme II. — *Soit*

$$X = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

un polynome de degré quelconque dont les coefficients, sauf le premier qui est égal à 1, sont des entiers divisibles par q (q étant premier), et où $a_n = \pm q^\mu$ ($\mu \geq 1$). X a pour facteurs irréductibles des polynomes entiers à coefficients entiers où le terme de degré le plus élevé en x a pour coefficient l'unité, et où le terme indépendant de x est $\pm q^\alpha$, avec $\alpha > 0$.

X a au plus μ facteurs irréductibles.

---

[1] Serret, *Algèbre supérieure*, t. I, p. 385 et suiv.; 1885.

Nous nous contentons d'énoncer ce lemme qui généralise un lemme connu et s'établit comme lui [1].

Théorème II. — *L'équation irréductible*

(10) $$x^{2\rho} \pm qx \pm q = 0 \qquad (q \text{ premier})$$

a son groupe G *d'ordre* $g \equiv 0\,[\bmod 2\rho(2\rho - 1)]$, *sauf peut-être pour des valeurs de* q *limitées en fonction de* ρ. *Si* $2\rho - 1$ *est premier,* G *est deux fois transitif, sauf peut-être pour les mêmes valeurs de* q.

Soient l'équation

(11) $$f(x) = x^n + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

$$\text{avec } n = 2\rho,\ a_{n-1} = \pm q,\ a_n = \pm q,$$

(12) $$x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n,$$

ses racines. Considérons l'équation

(13) $$\varphi(z) = 0,$$

de degré $\nu = C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ ayant pour racines les C_n^2 quantités $z_{i,j} = x_i + x_j (i \neq j)$. Les deux équations (11) et (13) sont équivalentes.

En effet, la résolution de (11) entraîne évidemment celle de (13); réciproquement, les égalités

$$x_2 + x_3 = z_{2,3},\quad x_1 + x_2 = z_{1,2},\quad x_1 + x_3 = z_{1,3},\quad \ldots,\quad x_1 + x_n = z_{1,n}$$

[1] Serret. *Algèbre supérieure*, t. I, p. 244; 1885.

Une démonstration semblable montrera encore que si

$$X = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_i x^{n-i} + \ldots \pm q^\mu (\mu > 0)$$

est tel que $A_j \equiv 0 \pmod q$ quand $j > i$, X n'a de diviseur rationnel $x^\nu + \ldots \pm 1$ que si $\nu \leq i$. Si, par exemple, $i = 1$, il faudra $\nu = 1$; alors si X n'a pas la racine ± 1, c'est-à-dire *a fortiori* si $A_1 \not\equiv \pm 1 + nq$, X est irréductible.

Comp. Netto, *Math. Ann.*, t. XLVIII, 1896, p. 82 et suiv.

permettant de déterminer les racines (12) en fonction linéaire rationnelle des $z_{i,j}$, la résolution de (13) entraîne celle de (11).

Ceci posé, je dis que l'on a

$$(14)\quad \begin{cases} \varphi(z) = z^\nu + \ldots + A_k z^{\nu-k} + \ldots \pm q^\rho, \\ \text{avec } A_k \equiv 0 \pmod q, \quad \text{quand } 0 < k < \nu. \end{cases}$$

En effet, l'équation (13) est le résultat de l'élimination [1] de x entre les équations (11) et

$$(15)\quad \Phi(x, z) = f'(x) + \frac{z-2x}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{(z-2x)^{n-1}}{n!} f^n(x) = 0.$$

Si l'on pose

$$(16)\quad [\Psi(z)]^2 = \Phi(x_1, z)\Phi(x_2, z)\ldots\Phi(x_n, z),$$

on pourra prendre

$$(17)\quad \varphi(z) = \Psi(z).$$

Alors, pour prouver que (14) a lieu, je dis qu'il suffit de montrer que

$$(18)\quad \begin{cases} [\Psi(z)]^2 = z^{2\nu} + \ldots + B_k z^{2\nu-k} + \ldots + q^{2\rho}, \\ \text{avec } B_k \equiv 0 \pmod q, \quad \text{quand } 0 < k < 2\nu. \end{cases}$$

En effet, on aura

$$(19)\quad \begin{cases} [\Psi(z)]^2 = z^{2\nu} + 2A_1 z^{2\nu-1} + (A_1^2 + 2A_2) z^{2\nu-2} + \ldots \\ \qquad + (A_i^2 + 2A_{i-1}A_{i+1} + \ldots + 2A_{2i}) z^{2\nu-2i} \\ \qquad + (2A_iA_{i+1} + 2A_{i-1}A_{i+2} + \ldots + 2A_{2i+1}) z^{2\nu-2i-1} + \ldots + A_\nu^2 \end{cases}$$

et

$$\Psi(z) = z^\nu + A_1 z^{\nu-1} + \ldots + A_\nu.$$

---

[1] Serret, *Algèbre supérieure*, t. I, p. 208; 1885.

D'abord $A_1, \ldots, A_\nu$ sont entiers, d'après un lemme connu [1], puisque $B_1, \ldots, B_{2\nu-1}$ le sont. Identifiant (18) et (19), on obtient

$$(20) \quad \begin{cases} 2A_1 = B_1 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, q), \\ A_1^2 + 2A_2 \equiv B_2 \equiv 2A_2 \quad (\mathrm{mod}\, q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_\nu^2 = q^{2\rho}, \end{cases}$$

c'est-à-dire que (14) a lieu si $q > 2$.

Établissons donc (18).

D'après (16), le coefficient de la plus haute puissance $z^{2\nu}$ de z dans (18) est $\left[\frac{f^n(x)}{n!}\right]^n = 1$. Les coefficients des termes de (18), autres que le premier, sont une somme de termes provenant du terme $(z - 2x_1)^{n-1} \ldots (z - 2x_n)^{n-1}$, ou des autres termes du produit (16). Les seuls qui ne contiennent aucune des racines $x_1, \ldots, x_n$ sont, en remarquant que

$$\frac{f^j(x)}{j!} = \frac{1}{j!}\left[n(n-1)\ldots(n-j+1)x^{n-j} + \ldots + j!\, a_{n-j}\right],$$
$$\text{avec } a_0 = 1, \quad a_{n-j} = 0, \quad \text{si } n > j > 1,$$

des produits de quantités a_{n-j}, dont une au moins est telle que $j < n$, et, par suite, sont divisibles par q. Ces coefficients sont donc de la forme V + multiple de q, V étant une fonction symétrique entière à coefficients entiers des racines $x_1, \ldots, x_n$, ne contenant aucun terme indépendant de $x_1, \ldots, x_n$; d'après le lemme I, V est divisible par q, et, par suite, ces coefficients sont divisibles par q.

Enfin, le terme A_ν^2 indépendant de z dans (18) est

$$A_\nu^2 = \prod_1^n X_i = \prod_1^n \left[f(x_i) - \frac{2x_i}{2!} f''(x_i) + \ldots + \frac{(-2x_i)^{n-1}}{n!} f^n(x_i)\right],$$

avec

$$X_i = a_{n-1} + x_i^{n-1}\left[C_n^1 - 2C_n^2 + 2^2 C_n^3 + \ldots + (-1)^{n-1} 2^{n-1} C_n^n\right].$$

---

[1] SERRET, *Algèbre supérieure*, t. I, p. 243; 1885.

Or

$$(1-2)^n = 1 - 2C_n^1 + 2^2C_n^2 - \ldots + (-1)^n 2^n C_n^n = (-1)^n = 1,$$

puisque n est pair : il en résulte de suite que le coefficient de x_i^{n-1} dans X_i est nul et

$$A_\nu^2 = a_{n-1}^n = q^{2\rho},$$

puisque $a_{n-1} = \pm q$.

Les équations (14) et (18) sont ainsi établies.

Appliquons le lemme II à l'équation (14) : $\varphi(z)$ a σ facteurs irréductibles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\sigma$ de degrés respectifs $d_1, d_2, \ldots, d_\sigma$, avec $\sigma \leqq \rho$; les termes indépendants de z dans ces facteurs sont respectivement $q^{b_1}, q^{b_2}, \ldots, q^{b_\sigma}$ et tous > 1; l'on a

$$(21)\qquad \begin{cases} d_1 + d_2 + \ldots + d_\sigma = \dfrac{n(n-1)}{2} = \rho(2\rho - 1), \\ b_1 + b_2 + \ldots + b_\sigma = \rho. \end{cases}$$

Considérons les équations irréductibles

$$(22)\qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_\sigma = 0.$$

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_\sigma$ leurs groupes de substitutions, d'ordres respectifs $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_\sigma$, divisibles par $d_1, d_2, \ldots, d_\sigma$ respectivement (¹), G le groupe de (10), d'ordre $\mathcal{G}$.

La résolution de l'équation (10) réduit le groupe de $\varphi_i = 0$ à l'unité, puisqu'elle entraîne la résolution de (13), par suite celle des équations (22). Il en résulte (²) que la résolution de $\varphi_i = 0$ réduit le groupe de (13) à un groupe d'ordre $\dfrac{\mathcal{G}}{\mathfrak{f}_i}$. Donc $\mathcal{G}$ est divisible par $\mathfrak{f}_i$, par suite par d_i. La connaissance des quantités d_i peut donc donner des indications sur la valeur de $\mathcal{G}$.

(¹) Jordan, *Traité des subst.*, Liv. III, Chap. I, th. II.
(²) *Id.*, th. XIII.

Je dis que l'on a les inégalités

$$(23) \qquad q^{b_i} \leq 2^{d_i}\left(1 + q^{\frac{1}{2\rho-1}}\right)^{d_i}.$$

En effet, soit α une limite supérieure du module des racines de (10): on aura, en désignant par $|\theta|$ le module d'une quantité quelconque θ

$$z_{i,j} = x_i + x_j,$$
$$|z_{i,j}| \leq |x_i| + |x_j| \leq 2\alpha;$$

or q^{b_i} est le produit des d_i racines de $\varphi_i = 0$ et, par suite,

$$(24) \qquad q^{b_i} \leq (2\alpha)^{d_i};$$

il reste à déterminer α.

(10) donne

$$|x_i^{2\rho}| \leq |a_{n-1}x_i + a_n| \leq q|x_i| + q,$$

et toute limite supérieure β des racines réelles positives de

$$x^{2\rho} - qx - q = 0$$

est telle que $|x_i| \leq \beta$, en sorte qu'on peut prendre $\beta = \alpha$.

Choisissons $\beta = 1 + q^{\frac{1}{2\rho-1}}$; (24) entraînera (23).

Ceci posé, les inégalités (23) ne seront toutes possibles, quand q est suffisamment grand, ρ étant donné, que si l'on a

$$(25) \qquad d_i \leq (2\rho - 1)b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

Supposons qu'il en soit ainsi; on ne pourra avoir, pour une valeur particulière τ de i,

$$d_\tau > (2\rho - 1)b_\tau,$$

sans quoi les inégalités (25) additionnées membre à membre, en tenant compte de cette dernière, donneraient

$$d_1 + \ldots + d_\sigma = \rho(2\rho - 1) > (2\rho - 1)(b_1 + \ldots + b_\sigma) = \rho(2\rho - 1),$$

ce qui est absurde. Donc (25) entraîne

$$d_i = (2\rho - 1) b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

et

$$d_i \equiv 0 \pmod{2\rho - 1}.$$

On en conclut

$$\mathcal{G} \equiv 0 \pmod{2\rho - 1}.$$

Le théorème proposé résulte alors immédiatement de ce que : 1° $\mathcal{G} \equiv 0 \pmod{2\rho}$ puisque (10) est irréductible et G transitif; 2° quand $2\rho - 1$ est premier, G contient une substitution circulaire d'ordre $2\rho - 1$ et est deux fois transitif. C. Q. F. D.

Complément à une étude récente concernant la théorie de la bicyclette [1] : *influence, sur l'équilibre, des mouvements latéraux spontanés du cavalier;*

PAR M. J. BOUSSINESQ.

§ IV. — Déplacements du centre de gravité général par les mouvements latéraux que s'imprime le bicycliste sur la selle.

11. Le Mémoire inséré aux pages 117 à 136 de ce Volume contient (p. 124) une équation, (9), qui relie le mouvement d'inclinaison de la bicyclette à son mouvement de progression, dans l'hypothèse d'un cavalier fixé sur sa machine, ou, plutôt, n'y exécutant que les deux manœuvres des pédales et du guidon, négligeables au point de vue des inerties exigées par leur production. Or, en réalité, le cavalier a besoin, dans les *virages*, comme on a vu à la page 134, de se pencher du côté de la concavité de la trajectoire sur laquelle il veut s'engager; et il y a lieu d'admettre que le centre de gravité du système, situé à une distance h, ordinairement constante, de la base a de la bicyclette, et presque confondu avec celui du corps du bicycliste, sort alors du plan médian du cadre pour s'en éloigner de petites distances λ, en se

[1] *Voir* p. 117 à 136 de ce Volume. Le présent Complément a été résumé dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. CXXVIII, p. 766 et 859, 27 mars et 4 avril 1899). Les paragraphes et les numéros, tant du texte que des formules, feront suite, ici, à ceux de l'étude précédente.

portant vers le centre de la courbure $\frac{1}{R}$ de la trajectoire à décrire sur le sol.

Les petites déformations que s'imprime à cet effet le cavalier, et les variations, plus ou moins complexes, qui en résultent généralement pour l'angle θ d'inclinaison du plan médian du cadre par rapport à la verticale, ont des effets en grande partie faciles à prévoir et à exprimer analytiquement, si l'on admet que ces mouvements du cavalier sur la bicyclette soient rapides, ou comme instantanés, et séparés par des intervalles relativement longs, durant lesquels il restera fixé à la machine.

12. Produits alors par de vives actions et réactions intérieures au système, les mouvements dont il s'agit auront, d'une part, assez peu de durée, pour qu'on puisse y négliger la progression de la bicyclette sur le sol, et, d'autre part, trop peu d'amplitude dans le sens vertical, pour que le travail de la pesanteur y soit sensible. Ils se réduiront ainsi à des rotations de la bicyclette autour de sa base, avec rotations inverses du cavalier accompagnées de déformations, et la loi de la conservation des aires les régira.

Le cavalier, pour y opérer un petit transport définitif λ du centre de gravité de tout le système hors du plan médian du cadre, pourra, par exemple, y imprimer successivement à ce plan médian deux rotations égales et contraires, qui nécessiteront deux rotations inverses et à aires équivalentes de l'ensemble de son corps. S'il a soin d'abaisser ou de plier un peu celui-ci, pendant sa rotation dirigée vers le centre de la courbure $\frac{1}{R}$ qu'il veut donner à la trajectoire, et, au contraire, de l'élever ou l'étendre durant la rotation inverse, les aires correspondant à la première rotation, décrites par des rayons vecteurs moindres, constitueront des secteurs plus ouverts, ou de plus grand angle, que les aires décrites dans le sens rétrograde; en sorte que, lorsque le cadre aura retrouvé sa première inclinaison θ sur la verticale, le cavalier conservera, par rapport au plan médian, une partie de son déplacement latéral. Et, par suite, le centre de gravité général du système se trouvera bien à une petite distance voulue λ de ce plan médian.

Nous admettrons d'ailleurs que le cavalier ait repris sa première

forme et sa première distance à l'axe a, afin que la loi des aires donne alors à l'ensemble la même vitesse de rotation $\frac{d\theta}{dt}$ qu'avant la rapide perturbation subie. Sans cela, il y aurait bien (dans l'hypothèse, nullement indispensable, que nous faisons ici pour plus de simplicité) conservation de l'inclinaison θ du cadre, mais non de sa dérivée $\frac{d\theta}{dt}$, dont le changement serait, il est vrai, insignifiant, vu la petitesse supposée de la déformation du système.

Le cavalier restant dès lors fixe sur la selle, les coordonnées relatives b, h, λ du centre de gravité par rapport au cadre persisteront, jusqu'à ce qu'il juge devoir retrouver, par une manœuvre inverse non moins rapide, sa primitive disposition où λ était nul, ou jusqu'à ce qu'il préfère en adopter une nouvelle.

13. Il importe d'observer que les deux rotations rapides du cadre, égales et contraires, dont il vient d'être question, n'ont rien d'obligé. Elles ne constituent que la manière probablement la plus simple de concevoir comment le centre de gravité du système peut sortir, presque brusquement, du plan médian, sans que l'inclinaison θ de celui-ci, ni sa vitesse d'inclinaison $\frac{d\theta}{dt}$, soient, en définitive, modifiées. Le même but pourrait être atteint par des déformations du système qui n'altéreraient la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$, ni, par suite (vu la brièveté du phénomène), l'inclinaison θ, *à aucun moment de la perturbation*.

En effet, représentons-nous, exprimées en fonction du temps t, les coordonnées relatives de chaque point matériel du système par rapport au plan médian du cadre, coordonnées définissant la configuration de l'ensemble et appelées i, j, l dans le premier Mémoire (p. 118), où elles sont comptées à partir d'un point G qui figurera maintenant, sur le plan médian, non plus le centre de gravité, mais seulement sa situation habituelle ([1]). Alors, si l'on donne les fonctions i, j, l, le

([1]) Il est clair que notre plan de repère KAG (figure de la page 118) mené, à travers le cadre de la bicyclette, suivant la droite des deux points de contact des roues avec le sol et par la situation habituelle G du centre de gravité du système, ne se confond généralement pas, *en toute rigueur*, avec le plan médian du

système pourra être construit à tout instant t, pourvu que la place de la base a sur le sol et l'inclinaison θ du plan médian y soient connues. La situation actuelle, à l'époque t, de la base a dépend du mouvement de progression, c'est-à-dire de la vitesse V du bas de la roue motrice et du rayon de courbure R de sa trajectoire, fonctions de t censées à la disposition du cavalier (grâce aux pédales et au guidon). Il suffit ainsi de déterminer les variations successives de θ, et, à cet effet, de former une équation du mouvement d'où soient éliminées à la fois les réactions du sol et les actions intérieures.

Or l'équation des moments, par rapport à la droite du sol qui coïncide présentement avec la base a, est justement dans ce cas. Elle sera donc la *seule* équation *différentielle* du mouvement à faire vérifier par les coordonnées, dans l'espace, des points du système. Mais il est naturel qu'on puisse y satisfaire, pendant le court intervalle de temps où i, j, l sont variables, aussi bien en faisant changer convenablement ces innombrables coordonnées relatives i, j, l, et en posant $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, qu'en y faisant, au contraire, varier $\frac{d\theta}{dt}$. Et le problème restera très indéterminé, vu la multitude des inconnues i, j, l, si l'on ajoute la condition que le centre de gravité du système éprouve en même temps tel petit déplacement relatif qu'on voudra, notamment le petit écart désiré λ d'avec le plan médian du cadre. Ainsi, le cavalier doit pouvoir, de bien des manières, déplacer le centre de gravité du système par rapport au plan médian, même sans altérer le mouvement actuel de celui-ci.

§ V. — Calcul de ces déplacements dans deux hypothèses simples.

14. Donnons en détail un exemple de la théorie exposée ici.

Pour qu'il soit facile et simple, nous supposerons la masse du cava-

---

cadre. Mais il est assez voisin de celui-ci pour que nous ayons pu, pour abréger, lui en attribuer le nom ; et il jouit, avec autant d'approximation, pour le moins, que le vrai plan médian du cadre, de la propriété, que nous avons admise, de se comporter comme un plan de symétrie général de la masse du système, dans l'évaluation approchée des moments d'inertie de celle-ci.

lier condensée en son centre de gravité. Cette hypothèse restrictive aura, il est vrai, l'inconvénient grave d'ôter à notre problème une grande partie de son intérêt pratique; car elle exigerait évidemment, pour s'appliquer avec une approximation suffisante, un cavalier à corps aussi ramassé et à membres aussi grêles, proportionnellement, que l'est l'araignée. De plus, en réduisant à trois seulement les coordonnées relatives i, j, l *variables*, seules quantités disponibles pour la production des effets voulus, elle diminuera outre mesure la généralité de la question et ne permettra même plus de se donner, comme condition accessoire, la conservation de la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ de rotation du plan médian.

Mais, en revanche, les formules s'y obtiendront presque sans calculs, et les résultats s'en dégageront d'une manière à peu près intuitive. D'ailleurs, la même hypothèse, rendue encore plus radicale par la concentration fictive des deux masses du cavalier et de la bicyclette en un seul point G, s'est montrée féconde et utile : car elle m'a fait connaître (¹) la vraie forme de l'équation différentielle (9) du mouvement, avec b' et h' réduits à b et h; en sorte qu'il a suffi d'y changer les valeurs numériques de ces deux constantes b et h pour rendre l'équation applicable au cas effectif de dissémination plus ou moins grande des masses dont il s'agit. Il y a donc lieu de penser que la réduction, au point de vue des calculs d'inerties, du cavalier à un seul point, n'empêchera pas les résultats d'indiquer, tout au moins, le véritable sens suivant lequel se produiront les phénomènes, dans les circonstances réelles les plus simples.

15. Pour fixer les idées, bornons-nous au cas où la bicyclette, de masse μ et d'un rayon de gyration donné r autour de sa base a, décrit sur le sol une trajectoire rectiligne, et où son plan médian est initialement vertical, se confondant ainsi avec le plan, alors fixe, à partir duquel sera comptée sa rotation ultérieure θ autour de l'horizontale du sol parcourue par la base a. Appelant d'ailleurs μ_1 la masse du cavalier,

(¹) Voir les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXVII, p. 843; 28 novembre 1898.

concentrée, comme on a dit, en son centre de gravité, à une certaine distance r' de la base a. contentons-nous d'étudier les mouvements qu'il exécutera sans renversements de vitesses, c'est-à-dire ceux où son rayon vecteur r', abaissé perpendiculairement sur la base a, prendra sa petite inclinaison θ' par rapport à la verticale (ou au plan vertical *origine*) en tournant toujours dans un même sens; de manière à balayer des aires élémentaires $\frac{1}{2}\mu' r'^2 d\theta'$ de même signe, ne s'entre-détruisant pas en majeure partie. Cela permettra, sur r', les petites erreurs relatives qui deviendraient inadmissibles, ou fausseraient grandement le résultat définitif, dans le cas de rotations successives en sens contraires.

Ainsi, la distance r' du cavalier à la base a de la bicyclette pourra, *ici*, être supposée invariable.

16. Désignons par Δ le déplacement latéral *angulaire* que s'imprimera le cavalier sur la selle, c'est-à-dire le petit angle $\theta' - \theta$ qu'il fera naître entre son rayon vecteur r' et le plan médian de la bicyclette, angle mesurant (au facteur constant près r') son déplacement relatif par rapport au plan de symétrie de son support, et dont il dispose à son gré entre certaines limites.

D'une part, nous aurons

$$\theta' - \theta = \Delta. \tag{18}$$

D'autre part, le principe de conservation de la somme des aires décrites $\frac{1}{2}\mu r^2 \theta$, $\frac{1}{2}\mu' r'^2 \theta'$ donnera

$$\mu r^2 \theta + \mu' r'^2 \theta' = 0. \tag{19}$$

Il vient donc

$$\frac{\theta'}{\mu r^2} = \frac{\theta}{-\mu' r'^2} = \frac{\theta' - \theta}{\mu r^2 + \mu' r'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta}{\mu r^2 + \mu' r'^2};$$

et, par suite,

$$\theta' = \frac{\mu r^2}{\mu r^2 + \mu' r'^2} \Delta, \qquad \theta = \frac{-\mu' r'^2}{\mu r^2 + \mu' r'^2} \Delta. \tag{20}$$

Dès lors, si ρ désigne la distance, à la base a, du centre de gravité de la bicyclette, distance plus petite que le rayon de gyration r, les petits écarts survenus, $\rho\theta$, $r'\theta'$, des deux masses μ, μ', au plan vertical mené suivant la base a, se trouvent déterminés; et celui, que j'appellerai δ, du centre de gravité général au même plan, est enfin

$$(21) \qquad \delta = \frac{\mu\rho\theta + \mu' r'\theta'}{\mu + \mu'} = \frac{\mu\mu' r'(r^2 - \rho r')}{(\mu + \mu')(\mu r^2 + \mu' r'^2)}\Delta.$$

L'introduction de l'écart λ du centre de gravité général d'avec le plan médian, à la place de l'écart angulaire donné Δ de la masse μ', ou de son écart linéaire et effectif $r'\Delta$, simplifie assez notablement cette formule (21). Comme l'écart linéaire analogue de la masse μ (située dans le plan) est nul, celui, λ, du centre de gravité des deux masses μ et μ' sera la moyenne

$$(22) \qquad \lambda = \frac{\mu' r'\Delta}{\mu + \mu'}.$$

Il vient donc, au lieu de (21),

$$(23) \qquad \delta = \frac{\mu(r^2 - \rho r')}{\mu r^2 + \mu' r'^2}\lambda.$$

17. Il semble convenable, dans la pratique, pour altérer le moins possible l'expression des vrais rapports mécaniques des deux masses μ, μ', de réduire, au point de vue des inerties, la bicyclette à son centre de gravité, comme on y a réduit le cavalier. Alors il vient

$$(24) \qquad r = \rho, \qquad r^2 - \rho r' = -\rho(r' - \rho);$$

et le facteur $r^2 - \rho r'$, dans (21), est négatif, vu que la différence $r - \rho$ exprime l'élévation, toujours positive et très notable, du centre de gravité du cavalier au-dessus du centre de gravité de la bicyclette. Donc Δ, δ ont signes contraires. En d'autres termes, *le cavalier, pour incliner le centre de gravité général du système vers la droite, doit porter son buste à gauche, et* vice versa.

Ce résultat subsiste sans qu'on ait besoin de réduire r à ρ. En effet, si l'on appelle $\rho + \Delta\rho$ la distance, à la base a, d'un élément quel

conque $d\mu$ de la masse μ de la bicyclette, le moment d'inertie μr^2 de celle-ci sera $\int(\rho+\Delta\rho)^2 d\mu$, c'est-à-dire

$$\mu\rho^2+2\rho\int(\Delta\rho)\,d\mu+\int(\Delta\rho)^2 d\mu=\mu\rho^2+\int(\Delta\rho)^2 d\mu.$$

Or ρ est approximativement la moitié de la hauteur de la selle; d'où il suit que $\Delta\rho$ n'excède qu'à de rares endroits (si même il y en a de tels) ρ en valeur absolue, et que le terme $\int(\Delta\rho)^2 d\mu$ n'atteint pas, à beaucoup près, la valeur $\mu\rho^2$. Donc μr^2 est bien moindre que $2\mu\rho^2$, et l'on a

$$(25)\qquad r^2<2\rho^2,\qquad r^2-\rho r'<\rho(2\rho-r').$$

Mais le centre de gravité du cavalier se trouve sensiblement au-dessus de la selle, et sa hauteur r' excède, par conséquent, la hauteur, 2ρ environ, de celle-ci. Donc le facteur $r^2-\rho r'$ est encore négatif.

18. Il suit de là, sous la réserve nécessitée par la concentration fictive de la masse μ' du bicycliste en un simple point, que *le cavalier, lorsqu'il ne s'imprime pas des rotations alternatives se neutralisant en majeure partie, avec variations de sa distance r' à la base, doit se porter du côté opposé à celui vers lequel il veut faire pencher la bicyclette.*

A la page 106 du Tome I (intitulé : *Équilibre et direction*) de son *Nouveau traité des bicycles et bicyclettes*, M. Bourlet a remarqué qu'il en est bien ainsi dans le *lâche-mains*, alors que le cavalier n'agit directement sur la bicyclette que par la moitié inférieure de son corps et en s'appuyant principalement sur les pédales.

Lorsque, au contraire, le cavalier tient en mains le guidon, auquel la partie supérieure de son corps communique des impulsions indépendantes (jusqu'à un certain point) de celles qu'exerce sur les pédales et même sur la selle la partie inférieure, ce n'est plus, on le conçoit, à un point unique, mais à un groupe de deux points *pour le moins*, comportant des rotations θ distinctes, un pour chaque moitié supérieure ou inférieure du corps, que le bicycliste doit être assimilé. De là, une variété bien plus grande des résultats, variété rendant possibles, sans

renversement de vitesses, des effets qui, dans le cas d'un bicycliste réductible à un seul point, auraient exigé deux rotations successives de sens contraires.

Parmi ces effets, y a-t-il celui qui consiste dans la parité de signe pour le déplacement angulaire relatif Δ du haut du corps et pour le déplacement linéaire absolu δ du centre de gravité général? ou bien, dans la pratique, une telle parité est-elle effectivement obtenue, en définitive (c'est-à-dire à la fin de la manœuvre), par deux rotations inverses du cavalier, se succédant rapidement, comme il a été expliqué au n° **12**? C'est ce qu'une étude plus complète permettra seule d'élucider.

19. Contentons-nous ici d'ébaucher l'étude dont il s'agit.

Si l'on considère comme deux points distincts les deux moitiés supérieure et inférieure $\frac{1}{2}\mu'$ du corps, soient : r' le rayon vecteur du premier de ces deux points, mesurant sa distance à la base a, Δ la rotation de ce rayon vecteur par rapport au plan médian, r le rayon vecteur ou de gyration de la moitié inférieure $\frac{1}{2}\mu'$, approximativement égal à celui de la bicyclette et moindre que r', enfin Δ_1 la rotation relative, analogue à Δ, de ce second rayon vecteur.

Les trois aires décrites par les rayons vecteurs des masses μ, $\frac{1}{2}\mu'$ (inférieure) et $\frac{1}{2}\mu'$ (supérieure) sont alors, évidemment,

$$\tfrac{1}{2}\mu r^2\theta,\quad \tfrac{1}{4}\mu' r^2(\theta+\Delta_1),\quad \tfrac{1}{4}\mu' r'^2(\theta+\Delta).$$

Leur somme étant nulle d'après le principe des aires, il viendra

$$(26)\qquad [2\mu r^2+\mu'(r^2+r'^2)]\theta+\mu'(r^2\Delta_1+r'^2\Delta)=0.$$

Cette équation fera connaître l'inclinaison θ prise par le plan médian : car on devra donner Δ et Δ_1, déplacements angulaires relatifs que s'imprime volontairement le cavalier sur ses appuis.

D'autre part, en assimilant, comme on l'a fait pour les deux moitiés du corps du cavalier, la masse μ de la bicyclette à un point, son rayon vecteur se confondra avec le rayon de gyration r, et les trois distances des masses μ, $\frac{1}{2}\mu'$, $\frac{1}{2}\mu'$ au plan vertical mené suivant la base a seront respectivement $r\theta$, $r(\theta+\Delta_1)$, $r'(\theta+\Delta)$. L'écart δ cherché qu'aura éprouvé, relativement au même plan vertical, le centre de gravité du

système, égalera leur moyenne

$$\frac{2\mu r\theta + \mu' r(\theta + \Delta_1) + \mu' r'(\theta + \Delta)}{2(\mu + \mu')}.$$

On aura donc

$$(27) \qquad 2(\mu + \mu')\delta = [2\mu r + \mu'(r + r')]\theta + \mu'(r\Delta_1 + r'\Delta).$$

Portons, dans (27), la valeur de θ tirée de (26); puis divisons par $\mu'\Delta$, en mettant en évidence le rapport $\frac{\delta}{\Delta}$, que nous nous proposons de rendre positif. Il vient

$$(28) \qquad 2\left(1 + \frac{\mu}{\mu'}\right)\frac{\delta}{\Delta} = \frac{\mu' r r'(r' - r)}{2\mu r^2 + \mu'(r^2 + r'^2)}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta} - 1 - \frac{2\mu}{\mu'}\right).$$

Comme 2 fois le rapport de la masse μ de la bicyclette à celle, μ', du cavalier sera une petite fraction, on voit, par cette formule, que le cavalier devra, pour assurer au centre de gravité général un déplacement δ de même sens que le déplacement angulaire relatif Δ de la moitié supérieure de son corps, imprimer à la moitié inférieure un déplacement angulaire relatif Δ_1 encore de même signe et sensiblement plus fort que celui, Δ, de la partie supérieure.

Un tel mode de déformation paraît facile à produire, δ, Δ et Δ_1 restant, en général, extrêmement petits. Dans les cas exceptionnels où le déplacement angulaire relatif Δ_1 de la moitié inférieure du corps devrait, au contraire, devenir trop grand pour être praticable, le bicycliste, même ayant le guidon en mains, recourrait sans doute de préférence, quoique peut-être inconsciemment, à deux rotations alternatives imprimées à bref intervalle, comme il a été expliqué au n° **12** (p. 218).

§ VI. — Leur influence sur l'équilibre; leur rôle essentiel dans les virages.

20. Voyons maintenant quelle loi régit le mouvement durant les intervalles de temps, relativement longs, où le déplacement linéaire relatif λ du centre de gravité, devenu différent de zéro, ne varie pas.

Le bras de levier du poids mg de tout le système, c'est-à-dire la distance de cette force à la base a de la bicyclette, n'est plus $h \sin\theta$, mais, évidemment, $h \sin\theta + \lambda \cos\theta$, ou, sensiblement, $h\theta + \lambda$; et, malgré la petitesse du déplacement latéral λ, le moment

$$mg(h\theta + \lambda) \tag{29}$$

du poids se trouve ainsi changé *dans un rapport notable;* car θ et $h\theta$ sont petits aussi. Au contraire, les autres termes de l'équation des moments, termes dus, en somme, à des inerties où la direction de la verticale ne joue aucun rôle appréciable, gardent très sensiblement leurs expressions relatives au cas $\lambda = 0$; car la configuration de l'ensemble est restée à peu près la même. Et leur valeur totale approchée est encore

$$-mh\left(h'\frac{d^2\theta}{dt^2} + b'\frac{d\frac{V}{R}}{dt} + \frac{V^2}{R}\right), \tag{30}$$

où V désigne la vitesse de progression de la bicyclette sur le sol, h' la longueur du pendule formé par le système autour de la base a, et b' la constante, peu différente de b, que définit la seconde formule (7) de la page 123.

La somme des deux expressions (29) et (30) étant nulle, on aura donc, en divisant par mhh', l'équation du mouvement, à *cinq* termes,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b'}{h'}\frac{d\frac{V}{R}}{dt} = \frac{g}{h'}\theta - \frac{V^2}{h'R} + \frac{g}{h'}\frac{\lambda}{h}. \tag{31}$$

21. Le déplacement latéral, λ à peu près, que s'est donné le cavalier sur sa machine, ajoute le cinquième terme. Et l'on voit que ce terme, au moment d'un virage, est très propre, en l'absence de toute courbure actuelle $\frac{1}{R}$ de la trajectoire, et à partir d'un état de verticalité parfaite du cadre, à faire naître précisément l'inclinaison positive θ qui motivera une manœuvre du guidon déviant la trajectoire du côté voulu.

Cet effet aurait lieu, d'ailleurs, quand bien même la perturbation initiale, qui a produit l'écart λ, n'aurait pas conservé la verticalité du cadre, ou aurait altéré θ, pourvu qu'elle eût suffi à faire sortir du plan

vertical de la base a le centre de gravité du système, dans le sens indiqué.

Cela arrivera si le déplacement δ, que donne, par exemple, la formule (21), est positif; car on remarquera que ce petit déplacement δ n'est autre chose que le bras de levier $h\theta + \lambda$ du poids de tout le système. Et, en effet, la distance h du centre de gravité général à la base a étant, dans le cas de la formule (21), la moyenne $\frac{\mu\rho + \mu' r'}{\mu + \mu'}$ de ρ et de r', les expressions (20) et (22) de θ et de λ donnent identiquement, pour $h\theta + \lambda$, la dernière valeur (21) de δ. Le second membre de l'équation (31) revient ainsi, quand le rayon R de courbure de la trajectoire est infini, à $\frac{g}{h'}\frac{\delta}{h}$. Et c'est le signe de δ qui règle alors celui de la dérivée seconde $\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

L'hypothèse, que j'ai faite au § IV, de la constance (au moins en moyenne) de la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$ pendant chaque perturbation, n'est donc pas nécessaire. Elle offre seulement l'avantage de simplifier le plus possible la transition d'un intervalle à l'autre et, par suite, le calcul de θ.

§ VII. — Loi générale du mouvement; multiplicité des moyens d'action qu'elle offre au cavalier.

22. En résumé, la fonction arbitraire qui doit généralement exprimer (p. 135), dans l'équation du mouvement de la bicyclette, l'influence des déplacements que s'imprime le cavalier sur la selle, est réduite ici à une suite de valeurs λ constantes, figurant seules, chacune à son tour, dans un cinquième terme de l'équation. Ce terme tend donc à devenir une petite fonction arbitraire du temps, quand les époques des déplacements spontanés du bicycliste se rapprochent de plus en plus. Et l'on peut admettre que les mouvements *moyens* du cadre se confondent alors, sensiblement, avec ce qu'ils seraient sous une certaine action continue du cavalier, savoir, une action donnant lieu aux mêmes écarts successifs λ du centre de gravité du système, à droite ou à gauche du plan médian du cadre, et conservant sans cesse l'expression (30) au moment total des inerties, grâce à des déformations appropriées.

Du reste, dès que l'action du cavalier devient assez graduelle, la petitesse et la *lenteur* de ces déformations suffisent évidemment, par elles-mêmes, à assurer au moment total des inerties l'expression approchée (30). L'équation du mouvement sera dès lors (31), avec θ continu, et il suffira que la suite voulue des *très petits* écarts λ du centre de gravité se produise effectivement.

Mais la manière dont le bicycliste devra s'y prendre, pour les réaliser ainsi avec continuité sans altérer sensiblement θ, est encore obscure; ou, plutôt, le degré de lenteur qu'il devra y mettre reste difficile à fixer. Aussi est-ce par une expérimentation confuse ou de sentiment, comme, d'ailleurs, presque toutes celles d'où sont dérivées nos habitudes premières, qu'il en apprendra la manœuvre, et qu'il parviendra à régler, d'après les circonstances, la fonction arbitraire par laquelle s'exprime, dans l'équation du mouvement, l'effet de ses déplacements d'ensemble sur la selle.

25. Quoi qu'il en soit, l'action totale du cavalier se traduit, on le voit, par trois fonctions arbitraires V, R et λ du temps, en rapport, respectivement, avec les trois manœuvres : 1° des pédales, d'où dépend la vitesse V de progression; 2° du guidon, d'où dépend le rayon de courbure R de la trajectoire, et 3° de l'ensemble du corps sur la selle, d'où dépend le transport, à un moment donné, du centre de gravité du système à droite ou à gauche du plan médian du cadre, pouvant se faire sans que l'inclinaison θ du plan et sa dérivée première $\frac{d\theta}{dt}$ cessent de varier graduellement. C'est précisément le nombre d'*arbitraires* dont on pouvait prévoir, *a priori*, la nécessité, pour qu'un cavalier parfaitement habile et attentif pût régler à sa volonté les *trois* éléments principaux d'une course projetée, savoir : la *trajectoire* à suivre, la *vitesse* du trajet, et aussi, afin d'éviter les chutes, la petite *inclinaison* θ de la machine.

Cette multiplicité des moyens d'action d'un cavalier un peu expérimenté explique la facilité relative de l'usage de la bicyclette. Le troisième moyen, employé avec une habileté suffisante, doit permettre, en particulier, de suivre sans déviation appréciable un chemin *même rectiligne*, sur lequel la valeur infinie du rayon R rend illusoires les deux premiers, en faisant évanouir les termes de l'équation (31) où

figurent V et R. Ce troisième moyen, surtout avec l'aide d'un balancier facilitant les déplacements latéraux λ, suffit bien au funambule, qui n'a guère, lui aussi, comme le bicycliste, que deux points d'appui (et pas d'une manière continue), sur son chemin de corde si étroit et si peu ferme.

§ VIII. — Analogie des organes d'un être vivant avec la bicyclette, en tant qu'ils réclament aussi une direction; comment se pose, au point de vue mécanique, le mystérieux problème de l'organisme.

24. Lorsque l'habitude aura rendu instinctive, sur une machine toujours la même et à frottements aussi adoucis que possible, la triple manœuvre des pédales, du guidon et des mouvements d'ensemble du cavalier sur la selle, cette manœuvre, en donnant une prise si variée au bicycliste, trouvera la machine docile aux impulsions les plus diverses et, pour ainsi dire, aux désirs et jusqu'aux caprices de son cavalier. Elle deviendra donc, en l'absence de toute résistance notable, presque aussi inconsciente que l'est de bonne heure, pour chaque être vivant (en santé), le maniement de son propre organisme; et la bicyclette sera comme un prolongement du corps de son cavalier, suivant une expression qui semble être familière aux connaisseurs.

A l'inverse, chaque organisme vivant n'est guère, dans sa presque totalité, qu'un ensemble de rouages analogues à la bicyclette, c'est-à-dire admettant, dans les équations de leurs mouvements perceptibles et même imperceptibles, des fonctions arbitraires du temps t, que déterminent à mesure les légères impulsions parties de quelques centres nerveux, seuls sièges des pouvoirs directeurs de tout le corps.

25. Mais ces centres nerveux eux-mêmes, qu'il serait irrationnel et peu conforme à l'expérience de soustraire aux lois générales de la matière, sont-ils régis exclusivement, dans la suite de leurs phénomènes internes (physico-chimiques ou mécaniques) et des impulsions qu'ils envoient autour d'eux, par les équations différentielles du mouvement; en sorte que les impulsions dont il s'agit se trouveraient, en définitive, uniquement fonction, à chaque instant, de l'état actuel, statique ou dynamique, du système et du milieu ambiant, sans aucune influence (directe) même des états antérieurs? Alors il faudrait re-

garder comme illusion pure, non seulement la *spontanéité* apparente de la *vie,* mais, aussi, le sentiment intime de nos actes prétendus *initiateurs* ([1]) et libres, de nos interventions *personnelles* pour orienter parfois les choses vers un *but* à atteindre, vers un avenir *voulu* à réaliser. Il n'y aurait plus qu'en apparence, même chez l'homme, des *causes finales,* des aspirations véritablement actives vers des *fins* désirées.

Ou bien, au contraire, ces centres nerveux, dont l'excessive instabilité physico-chimique est évidente, n'exigeraient-ils pas, pour vivre et fonctionner, des conditions d'existence choisies justement de telle manière, que les équations différentielles du mouvement y ouvriraient plusieurs voies aux phénomènes, dès lors soustraits (ou pouvant l'être) à la domination exclusive de l'état mécanique présent? Grâce à ces conditions *singulières* (comme serait, dans un autre ordre d'idées, le tracé d'un canal d'arrosage, à la surface de la terre, suivant une ligne de *faîte* ou de partage des eaux), et tellement spéciales ou délicates qu'elles sont inimitables artificiellement, au point de rendre impossible la génération spontanée des organismes même les plus rudimentaires, les centres nerveux se trouveraient, ainsi, constitués de manière que la raison déterminante de certaines impulsions émises par eux serait, non dans les équations du mouvement, *toujours obéies cependant,* mais dans des principes *directeurs* étrangers à la pure physique et inspirés par des lois d'ordre *physiologique* ou *moral.* Ces principes directeurs auraient alors comme rôle, non de déployer de la force évaluable en grammes ou de produire du travail exprimable en fraction de kilogrammètre, mais d'utiliser l'exceptionnelle ou singulière indétermination mécanique des phénomènes, pour *aiguiller* ceux-ci, quand ils sont purement vitaux, dans les sens indiqués par les lois physiologiques, et, quand ils sont libres, dans le sens qu'aura choisi la volonté. La rareté relative de leur manifestation dans le monde, comparée à l'universelle présence des causes physico-chimiques (non moins mystérieuses d'ailleurs), s'expliquerait par l'étroitesse même de leur champ d'action, c'est-à-dire par la singularité extrême des circonstances amenant l'indétermination mécanique, qui, seule, pourrait les révéler.

([1]) C'est-à-dire créateurs de phénomènes qui soient des *commencements,* non de simples suites de phénomènes antérieurs.

Bref, il y aurait place, dans l'Univers visible, pour deux espèces de *causes motrices :* d'une part, les *forces* des mécaniciens, physiciens et chimistes, représentées dans les équations différentielles du mouvement par leurs effets, qui sont les *accélérations;* d'autre part, les *principes directeurs*, savoir, la *vie* et la *volonté,* échappant à ces équations différentielles et, par conséquent, irréductibles aux forces ou incapables d'entrer en conflit avec elles. Et le domaine des principes directeurs serait suffisant pour sauvegarder les deux essentielles distinctions de l'*inorganique* et de l'*organique*, du *Physique* et du *Moral*.

26. Telle est la grave et troublante question, posée sous d'autres formes dès l'origine de la Philosophie ou même de la réflexion humaine, que j'ai abordée il y a un quart de siècle, et où j'ai découvert et fait connaître la seconde alternative, nullement soupçonnée, ce semble, jusqu'alors ([1]).

Le bon sens la tranche plutôt en faveur de cette seconde alternative. Car il regarde volontiers la vie et la volonté comme des principes d'action *distincts,* qu'il oppose même aux forces physico-chimiques, c'est-à-dire, au fond, mécaniques, sans toutefois les considérer nécessairement comme de nature analogue, c'est-à-dire comme ayant avec elles une commune mesure. De plus, il lui répugne, non moins qu'à la morale, de ne faire, dans le domaine du réel, aucune part à la *contingence,* et de voir partout une nécessité absolue, un enchaînement de causes et d'effets tellement serré, qu'il n'admettrait, dans sa trame, l'insertion possible d'aucune initiative, d'aucune spontanéité.

([1]) Après une hésitation de plusieurs années, je me décidai à publier et à développer cette idée en 1877 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 19 février et 3 avril 1877, t. LXXXIV, p. 362 et 944; Journal *Les Mondes,* du 22 mars 1877, et *Revue scientifique,* du 14 avril 1877; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences morales et politiques,* mai 1878, t. IX, p. 696 à 757; *Mémoires de la Société des Sciences de Lille,* année 1879, t. VI, p. 1 à 141, et année 1880, t. VIII, p. 332 à 370; Journal *Les Mondes,* du 28 novembre 1878 et *Revue philosophique,* de janvier 1879, p. 58).

Sur les fonctions abéliennes singulières;
(Premier Mémoire)

PAR M. G. HUMBERT.

Considérons un système de fonctions abéliennes, à deux variables u et v, ayant pour périodes normales

$$\begin{array}{lllll} u: & 1, & 0, & g, & h, \\ v: & 0, & 1, & h, & g'; \end{array}$$

nous dirons que ces périodes vérifient une *relation de forme singulière* ou *relation singulière*, si elles sont liées par l'équation

$$(1) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, B, C, D, E sont des entiers, qu'on peut toujours supposer, sans nuire à la généralité, n'avoir aucun diviseur commun.

Les fonctions abéliennes dont les périodes vérifient une ou plusieurs relations singulières, et que nous appellerons *fonctions abéliennes singulières*, jouissent de propriétés importantes; on peut leur rattacher des *fonctions intermédiaires singulières* qui ne sont pas des fonctions thêta aux mêmes périodes. De plus, les fonctions abéliennes

singulières admettent des *transformations* qui n'existent pas dans le cas général, et ce sont enfin les seules qui soient susceptibles d'une *multiplication singulière*, extension de la multiplication complexe des fonctions elliptiques.

Le présent Mémoire est consacré à quatre questions principales qui correspondent à ses quatre parties :

1° La réduction, au moyen de transformations du premier ordre, d'une relation singulière; on y verra apparaître un invariant entier, qui joue un rôle capital;

2° et 3° L'étude des *fonctions* intermédiaires singulières et des *courbes* qui leur correspondent sur la surface de Kummer;

4° La formation de l'équation *algébrique* qui lie les modules d'une fonction abélienne dont les périodes vérifient une relation singulière.

Nous réserverons, pour un second Mémoire, l'étude des transformations singulières et celle des multiplications complexes.

Il va sans dire que toutes ces théories s'étendent aux fonctions abéliennes d'un nombre quelconque de variables; nous aurons à revenir sur ce sujet général.

PREMIÈRE PARTIE.

Invariant d'une relation singulière.

1. Soit la relation singulière

$$(1) \qquad A g + B h + C g' + D(h^2 - g g') + E = 0.$$

Faisons subir aux périodes une transformation d'ordre quelconque k; soient G, H, G' les périodes nouvelles qui correspondent à g, h, g'; si l'on désigne par $(ab)_{ij}$ la quantité $a_i b_j - a_j b_i$, on a entre les périodes

les relations d'Hermite (¹)

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} g &= \frac{(db)_{01}+(db)_{31}G+2(db)_{03}H+(db)_{02}G'+(db)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+2(ab)_{03}H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')},\\ h &= \frac{(ad)_{01}+(ad)_{31}G+[2(ad)_{03}-k]H+(ad)_{02}G'+(ad)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots},\\ g' &= \frac{(ac)_{01}+(ac)_{31}G+2(ac)_{03}H+(ac)_{02}G'+(ac)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots},\\ h^2-gg' &= \frac{(cd)_{01}+(cd)_{31}G+2(cd)_{03}H+(cd)_{02}G'+(cd)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}, \end{aligned}\right.$$

les dénominateurs sont les mêmes dans les quatre formules; les a_i, b_i, c_i, d_i sont seize entiers vérifiant les relations de la transformation d'ordre k :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} (ad)_{01}+(bc)_{01} &= (ad)_{02}+(bc)_{02}\\ &= (ad)_{13}+(bc)_{13}=(ad)_{23}+(bc)_{23}=0,\\ (ad)_{03}+(bc)_{03} &= (ad)_{12}+(bc)_{12}=k. \end{aligned}\right.$$

On peut remplacer ces relations par les suivantes qui leur sont équivalentes d'après M. Hermite :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} (ab)_{03}+(ab)_{12} &= (ac)_{03}+(ac)_{12}\\ &= (bd)_{03}+(bd)_{12}=(cd)_{03}+(cd)_{12}=0,\\ (ad)_{03}+(ad)_{12} &= (bc)_{03}+(bc)_{12}=k. \end{aligned}\right.$$

Inversement, des équations (2), on peut tirer G, H, G', H^2-GG' en fonction de g, h, g' :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} G &= \frac{(cd)_{02}+(ac)_{02}g+2(bc)_{02}h+(db)_{02}g'+(ab)_{02}(h^2-gg')}{(cd)_{23}+(ac)_{23}g+2(bc)_{23}h+(db)_{23}g'+(ab)_{23}(h^2-gg')},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Il résulte de la forme des équations (2) que toute relation singulière $Ag+Bh+Cg'+D(h^2-gg')+E=0$, entre g, h, g', se

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XL; 1855.

transforme en une relation singulière entre G, H, G′,

$$(6)\qquad A_1 G + B_1 H + C_1 G' + D_1(H^2 - GG') + E_1 = 0,$$

où :

$$(7)\quad \begin{cases} A_1 = A(db)_{31} + B(ad)_{31} + C(ac)_{31} + D(cd)_{31} + E(ab)_{31}, \\ B_1 = 2A(db)_{03} + B[2(ad)_{03} - k] + 2C(ac)_{03} + 2D(cd)_{03} + 2E(ab)_{03}, \\ C_1 = A(db)_{02} + B(ad)_{02} + C(ac)_{02} + D(cd)_{02} + E(ab)_{02}, \\ D_1 = A(db)_{23} + B(ad)_{23} + C(ac)_{23} + D(cd)_{23} + E(ab)_{23}, \\ E_1 = A(db)_{01} + B(ad)_{01} + C(ac)_{01} + D(cd)_{01} + E(ab)_{01}. \end{cases}$$

2. Cela posé, on vérifie immédiatement, en se servant de ces expressions et des relations (3) et (4) entre les a_i, b_i, c_i, d_i, l'identité fondamentale

$$(8)\qquad B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1 = k^2(B^2 - 4AC - 4DE).$$

Par exemple, dans le premier membre, où A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 sont remplacés par leurs valeurs (7), le coefficient de $4A^2$ est

$$(db)_{03}^2 - (db)_{31}(db)_{02} - (db)_{23}(db)_{01};$$

on peut l'écrire, puisque, d'après (4), $(db)_{03} + (db)_{12} = 0$:

$$-(db)_{03}(db)_{12} - (db)_{31}(db)_{02} - (db)_{23}(db)_{01},$$

ce qui est nul identiquement. De même, le coefficient de $4AB$ dans le premier membre de (8) est

$$(db)_{03}[2(ad)_{03} - k] - (db)_{02}(ad)_{31} - (db)_{31}(ad)_{02} - (db)_{23}(ad)_{01} - (db)_{01}(ad)_{23},$$

ce qu'on peut écrire, en tenant compte de (3) et de (4),

$$-(db)_{03}(ad)_{12} - (db)_{12}(ad)_{03} - (db)_{02}(ad)_{31} - (db)_{31}(ad)_{02} - (db)_{23}(ad)_{01} - (db)_{01}(ad)_{23},$$

quantité nulle identiquement.

Calculons de même le coefficient de B^2 dans le premier membre de (8); c'est, en remplaçant $2(ad)_{03}-k$ par $(ad)_{03}-(ad)_{12}$:

$$[(ad)_{03}-(ad)_{12}]^2-4(ad)_{31}(ad)_{02}-4(ad)_{23}(ad)_{01},$$

ou :

$$[(ad)_{03}+(ad)_{12}]^2,$$

c'est-à-dire, d'après (4), k^2, comme dans le second membre de (8). On vérifierait d'une manière toute pareille les autres termes de la relation (8), qui se trouve ainsi démontrée.

Observons maintenant que A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, obtenus sous la forme (7), peuvent avoir un plus grand diviseur commun ρ, de sorte que, si $A_1=\rho A'$, $B_1=\rho B'$, ..., $E_1=\rho E'$, l'identité (8) s'écrit

(9) $$\rho^2(B'^2-4A'C'-4D'E')=k^2(B^2-4AC-4DE).$$

Inversement, si l'on transforme la relation

$$A'G+B'H+C'G'+D'(H^2-GG')+E'=0,$$

en y remplaçant G, H, G', H^2-GG' par leurs valeurs (5), en g, h, g', h^2-gg', on retombe évidemment sur la relation singulière (1), dont on est parti, mais à un facteur entier près σ, de sorte qu'on obtient l'identité, analogue à (9),

(10) $$\sigma^2(B^2-4AC-4DE)=k^2(B'^2-4A'C'-4D'E').$$

Bornons-nous, pour le moment, au cas d'une *transformation du premier ordre* ($k=1$): les identités (9) et (10) donnent immédiatement $\rho^2\sigma^2=1$, c'est-à-dire $\rho^2=\sigma^2=1$, et par suite

$$B'^2-4A'C'-4D'E'=B^2-4AC-4DE,$$

c'est-à-dire que la quantité $B^2-4AC-4DE$ reste invariable par les transformations du premier ordre. Ainsi :

5. *Une transformation quelconque du premier ordre des périodes change la relation singulière*

$$Ag+Bh+Cg'+D(h^2-gg')+E=0.$$

où A, B, C, D, E *sont des entiers sans diviseur commun, en une relation singulière analogue par rapport aux nouvelles périodes; dans cette opération, la quantité*

$$\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$$

demeure invariable.

On appellera cette quantité Δ l'*invariant* de la relation singulière; c'est un entier de la forme $4N$ ou $4N+1$, selon que B est pair ou impair. Il résulte de là que la *parité* du coefficient B ne varie pas par les transformations du premier ordre.

Réduction d'une relation singulière à la forme canonique.

4. On peut, par une série de transformations du premier ordre, ramener une relation singulière à une forme canonique extrêmement simple, ne dépendant que de l'invariant.

5. Je dis d'abord qu'on peut faire disparaître le terme en $h^2 - gg'$.
Effectuons, en effet, une transformation du premier ordre pour laquelle on ait

$$a_1 = a_2 = b_0 = b_3 = c_0 = c_3 = d_1 = d_2 = d_3 = 0$$
$$a_3 = 1; \qquad d_0 = -1.$$

Les relations (3) entre les a_i, b_i, c_i, d_i se réduisent à

$$(11) \qquad b_1 c_2 - b_2 c_1 = 1,$$

les autres étant identiquement satisfaites.
La relation

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0$$

devient alors, si l'on remplace g, h, g', $h^2 - gg'$ par leurs valeurs (2), une relation de même forme en G, H, G', où le coefficient de $H^2 - GG'$

et le terme indépendant ont pour valeurs

$$(12)\qquad \begin{cases} D_1 = -Cc_2 - Eb_2, \\ E_1 = -Ab_1 + Dc_1 + a_0(Cc_1 + Eb_1). \end{cases}$$

Il est aisé de faire disparaître D_1 : soit δ le plus grand commun diviseur de C et de E; on prendra

$$c_2 = \frac{E}{\delta}; \qquad b_2 = -\frac{C}{\delta};$$

b_2 et c_2 seront premiers entre eux, de sorte qu'on pourra toujours trouver des entiers b_1 et c_1 vérifiant (11): quant à a_0 il restera arbitraire.

6. Je dis, en second lieu, qu'on peut faire disparaître le terme constant.

Supposons, en effet, la relation singulière privée de terme en $h^2 - gg'$:

$$Ag + Bh + Cg' + E = 0;$$

effectuons la transformation du premier ordre qui n'altère pas h et g', et qui remplace g par $g + \theta$, θ étant un entier quelconque: la relation singulière devient

$$Ag + Bh + Cg' + E' = 0, \qquad E' = E + A\theta.$$

Je dis qu'on peut disposer de θ de manière que le plus grand commun diviseur de C et de E' divise A.

Soient en effet :

δ_1 le plus grand commun diviseur de A, C, E:

$\delta_1\delta_2$ le plus grand commun diviseur de A et E;

$\frac{C}{\delta_1}$ sera premier avec δ_2.

D'après le théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique,

on pourra choisir θ de manière que

$$\frac{E}{\delta_1 \delta_2} + \theta \frac{A}{\delta_1 \delta_2}$$

soit un nombre premier p, supérieur à C : le premier terme et la raison de la progression sont en effet premiers entre eux ; on aura alors

$$E' = E + A\theta = \delta_1 \delta_2 p.$$

Le plus grand commun diviseur de E' et de C est alors δ_1, puisque $\frac{C}{\delta_1}$ est premier avec $\delta_2 p$, ce qui démontre la proposition énoncée.

Ainsi la relation singulière peut être supposée de la forme

$$(13) \qquad Ag + Bh + Cg' + E = 0,$$

le plus grand commun diviseur, δ, de C et E divisant A.

Effectuons maintenant la même transformation du premier ordre qu'au n° 5, la relation (13) devient

$$A_1 G + B_1 H + C_1 G' + D_1 (H^2 - GG') + E_1 = 0,$$

avec (12) :

$$D_1 = -Cc_2 - Eb_2, \qquad E_1 = -Ab_1 + a_0(Cc_1 + Eb_1),$$

et je dis qu'on peut annuler D_1 et E_1.

Pour annuler D_1 prenons

$$c_2 = \frac{E}{\delta}, \qquad b_2 = -\frac{C}{\delta};$$

la relation (11) devient

$$b_1 \frac{E}{\delta} + c_1 \frac{C}{\delta} = 1,$$

et elle a des solutions en b_1, c_1, puisque $\frac{E}{\delta}$ et $\frac{C}{\delta}$ sont premiers entre eux. Soit b_1, c_1 une solution quelconque ; on annulera E_1 si l'on peut

choisir a_0 de manière que

$$a_0(Cc_1 + Eb_1) = Ab_1,$$

c'est-à-dire

$$a_0\delta = Ab_1;$$

cela est possible, puisque δ divise A, par hypothèse.

Ainsi une transformation convenable du premier ordre permet de ramener la relation singulière générale à la forme

$$(14) \qquad Ag + Bh + Cg' = 0.$$

7. On peut encore pousser plus loin la réduction en employant les transformations du premier ordre des deux types suivants :

8. *Premier type.* — Prenons

$$a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = c_0 = c_1 = d_0 = d_1 = 0.$$

Il résulte des formules (7) que la relation (14) garde la même forme en G, H, G'; c'est-à-dire qu'il ne s'introduit ni terme en $H^2 - GG'$, ni terme constant : les quantités $(db)_{01}$, $(ad)_{01}$, $(ac)_{01}$, $(db)_{23}$, $(ad)_{23}$, $(ac)_{23}$ sont en effet toutes nulles.

Prenons en outre

$$c_2 = a_0, \qquad c_3 = -a_1, \qquad d_2 = -b_0, \qquad d_3 = b_1;$$

les relations (3) entre les a_i, b_i, c_i, d_i se réduisent à

$$(15) \qquad a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1,$$

et l'on a, pour exprimer g, h, g' en G, H, G' :

$$\begin{aligned} g &= \phantom{-a_1b_1G+{}} b_1^2 G - 2b_0 b_1 H + b_0^2 G', \\ h &= -a_1 b_1 G + (a_0 b_1 + a_1 b_0) H - a_0 b_0 G', \\ g' &= \phantom{-a_1b_1G+{}} a_1^2 G - 2a_0 a_1 H + a_0^2 G'. \end{aligned}$$

La relation singulière (14) devient alors

$$A_1 G + B_1 H + C_1 G' = 0,$$

étant posé

$$A_1 = A b_1^2 - B a_1 b_1 + C a_1^2,$$
$$B_1 = -2 A b_0 b_1 + B(a_0 b_1 + a_1 b_0) - 2 C a_0 a_1,$$
$$C_1 = A b_0^2 - B a_0 b_0 + C a_0^2.$$

Les coefficients A_1, $-B_1$, C_1 sont précisément ceux qu'on obtient en effectuant sur la forme quadratique

$$A x^2 - B x y + C y^2$$

la substitution de déterminant 1 [à cause de (15)]

$$x = b_1 x' + b_0 y', \qquad y = a_1 x' + a_0 y'.$$

Ainsi, en désignant par $(A_1, -B_1, C_1)$ une forme quadratique quelconque équivalente à la forme $(A, -B, C)$ la relation singulière $A g + B h + C g' = 0$ peut se ramener, par une transformation du premier ordre, à

$$A_1 g + B_1 h + C_1 g' = 0.$$

9. *Second type.* — Prenons maintenant

$$a_1 = a_2 = b_0 = b_3 = c_0 = c_3 = d_1 = d_2 = 0,$$
$$a_0 = d_0 = 1.$$

Les relations (3) entre les a_i, b_i, c_i, d_i se réduisent à

(16) $$\begin{cases} d_3 - a_3 = 1, \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 = 1, \end{cases}$$

et la relation singulière $A g + B h + C g' = 0$ devient

$$A' G + B' H + C' G' + D'(H^2 - G G') + E' = 0,$$

étant posé :

$$\begin{aligned} A' &= A d_3 b_1 + C a_3 c_1, \\ B' &= B, \\ C' &= A b_2 + C c_2, \\ D' &= -A d_3 b_2 - C a_3 c_2, \\ E' &= A b_1 + C c_1. \end{aligned}$$

Annulons D′ et E′ : à cet effet, désignons par δ le plus grand commun diviseur de A et de C, de sorte que

$$A = \delta\alpha, \qquad C = \delta\gamma,$$

α et γ étant premiers entre eux.

Pour annuler E′, posons

$$b_1 = \gamma, \qquad c_1 = -\alpha;$$

annulons D′ :

(17) $$\alpha d_3 b_2 + \gamma a_3 c_2 = 0.$$

Les formules (16) s'écrivent alors

(18) $$d_3 = 1 + a_3, \qquad \gamma c_2 + \alpha b_2 = 1.$$

Soit (b_2, c_2) une solution quelconque de la dernière équation (il en existe, puisque α et γ sont premiers entre eux); la relation (17) donne, en tenant compte de (18) :

$$a_3 = -\alpha b_2;$$

d'où

$$d_3 = 1 + a_3 = 1 - \alpha b_2,$$

et tous les nombres a_i, b_i, c_i, d_i sont déterminés.

On a alors

$$\begin{aligned} A' &= \delta\alpha\gamma(1 - \alpha b_2) + \delta\alpha\gamma\,\alpha b_2 = \delta\alpha\gamma, \\ B' &= B, \\ C' &= \delta\alpha\, b_2 + \delta\gamma\, c_2 = \delta(\gamma c_2 + \alpha b_2) = \delta; \end{aligned}$$

ce qui montre que l'on peut faire en sorte, par une transformation du premier ordre, que C′ se réduise au plus grand commun diviseur de A et de C et divise A′.

10. Cela posé, la relation singulière étant ainsi ramenée à la forme

$$C\alpha g + Bh + Cg' = 0,$$

on peut supposer B et C sans diviseur commun. Effectuons maintenant une des transformations du premier type pour laquelle on ait

$$a_0 = b_1 = a_1 = 1, \qquad b_0 = 0;$$

la relation singulière ci-dessus devient, par les formules du n° **8** :

$$(C\alpha - B + C)G + (B - 2C)H + CG' = 0.$$

Le plus grand commun diviseur des coefficients de G et G′, c'est-à-dire de $C(\alpha - 1) - B$ et de C, est celui de B et de C, c'est-à-dire l'*unité;* on pourra donc, par une transformation du second type, ramener la relation singulière précédente à une forme analogue, où le coefficient de g' sera l'*unité*,

$$Ag + Bh + g' = 0. \tag{19}$$

11. Distinguons maintenant deux cas selon que B est pair ou impair (on a vu au n° **5** que la parité de B ne changeait pas dans les transformations du premier ordre).

1° Si $B = 2B'$, la forme quadratique

$$Ax^2 - 2B'xy + y^2$$

peut s'écrire

$$(y - B'x)^2 + (A - B'^2)x^2;$$

elle est donc équivalente à la forme

$$(A - B'^2)X^2 + Y^2,$$

où il n'y a pas de terme en XY. Par suite, d'après le n° **8**, la relation

singulière (19) peut, par une transformation du premier type, se ramener à la forme

$$(19\ bis)\qquad A_1 g + g' = 0.$$

2° Si $B = 2B' + 1$, la forme

$$Ax^2 - (2B'+1)xy + y^2$$

est équivalente à la forme

$$(A - B'^2 - B')X^2 - XY + Y^2,$$

car elle s'écrit

$$(y - B'x)^2 - (y - B'x)x + (A - B'^2 - B')x^2;$$

donc la relation singulière (19) peut se ramener à la forme

$$(19\ ter)\qquad A'_1 g + h + g' = 0.$$

Observons maintenant que la quantité $\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$ est un invariant; si donc Δ est la valeur de cet invariant pour la relation singulière générale dont on est parti; on aura

$$-4A_1 = \Delta, \qquad \text{si B est pair,}$$
$$1 - 4A'_1 = \Delta, \qquad \text{si B est impair:}$$

ce qui détermine A_1 et A'_1 en fonction de Δ. Voici donc le théorème final :

12. Théorème. — *Soit une relation singulière quelconque*

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0:$$

si son invariant $\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$ *est divisible par* 4, *c'est-à-dire si* B *est pair, on peut, par des transformations du premier ordre des périodes, la ramener au type*

$$-\frac{\Delta}{4}g + g' = 0;$$

et si Δ est de la forme $4N+1$, c'est-à-dire si B est impair, au type

$$-\frac{\Delta-1}{4}g+h+g'=0.$$

13. *Corollaire.* — Il résulte de là que deux relations singulières quelconques, de même invariant, sont *équivalentes,* c'est-à-dire peuvent-être ramenées l'une à l'autre par une transformation du premier ordre : l'une et l'autre en effet peuvent être ramenées à un seul et même type, où ne figure que l'invariant. Ainsi, dans le sens qui vient d'être attribué à l'équivalence,

Toutes les relations singulières de même invariant sont équivalentes.

Propriétés de l'invariant.

14. Théorème. — *L'invariant est essentiellement positif.*

Prenons, en effet, la relation singulière sous la forme

$$\alpha g+\beta h+\gamma g'=0, \tag{20}$$

on a

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma.$$

Pour qu'il existe des fonctions abéliennes de u, v ayant pour couples de périodes $1, 0 : 0, 1 : g, h : h, g'$, il faut (et il suffit), comme on sait, qu'en désignant par g_1, h_1, g'_1 les parties imaginaires de g, h, g' ($g=g_2+ig_1, \ldots$), on ait

$$h_1^2-g_1g'_1<0.$$

On a entre g_1, h_1, g'_1 la relation, déduite de (20) :

$$\alpha g_1+\beta h_1+\gamma g'_1=0,$$

et si l'on tire h_1 de cette équation pour le porter dans l'inégalité précédente, celle-ci devient

$$\alpha^2g_1^2+(2\alpha\gamma-\beta^2)g_1g'_1+\gamma^2g_1'^2<0.$$

Pour qu'il puisse exister des valeurs réelles de g_1, g'_1 vérifiant l'inégalité, il faut évidemment que le trinôme en g_1 et g'_1 ait ses racines réelles et distinctes, c'est-à-dire que

$$(2\alpha\gamma - \beta^2)^2 - 4\alpha^2\gamma^2 > 0 \quad \text{ou} \quad \beta^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) > 0,$$

c'est-à-dire $\Delta > 0$, ce qui démontre le théorème.

15. Théorème. — *Si l'invariant d'une relation singulière est carré parfait, une intégrale abélienne de première espèce correspondant aux périodes considérées est réductible à une intégrale elliptique; et réciproquement.*

En effet, pour qu'une intégrale de première espèce se réduise à une intégrale elliptique, il faut et il suffit que les périodes de $u + \lambda v$ se réduisent à deux, λ désignant une constante convenable. Les périodes simultanées de u, v étant 1, 0; 0, 1; g, h; h, g', les périodes de $u + \lambda v$ sont

$$1, \quad \lambda, \quad g + \lambda h, \quad h + \lambda g';$$

si donc ω et ω' sont les périodes elliptiques, il faut et il suffit que l'on ait

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} 1 &= m_0\omega + n_0\omega', \\ \lambda &= m_1\omega + n_1\omega', \\ g + \lambda h &= m_2\omega + n_2\omega', \\ h + \lambda g' &= m_3\omega + n_3\omega'; \end{aligned}\right.$$

les m_i, n_i étant des entiers. On en conclut, en éliminant λ, ω et ω', la relation de *forme singulière*, entre g, h, g',

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 = (nm)_{03}g &+ [(nm)_{13} - (nm)_{02}]h \\ &- (nm)_{12}g' + (nm)_{01}(h^2 - gg') - (nm)_{23}. \end{aligned}\right.$$

Je dis que l'invariant correspondant est un carré parfait, ce qui revient à établir que l'expression

$$[(nm)_{13} - (nm)_{02}]^2 + 4(nm)_{03}(nm)_{12} + 4(nm)_{01}(nm)_{23}$$

est un carré : c'est en effet le carré de $(nm)_{13} + (nm)_{02}$.

Ainsi, *dans le cas elliptique,* il existe entre les périodes une relation singulière dont l'invariant est un carré; *réciproquement,* si l'invariant d'une relation singulière est le carré n^2, cette relation est équivalente à la relation $nh - 1 = 0$, qui a même invariant : le tableau des périodes peut donc être ramené, par une transformation du premier ordre, à

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & \frac{1}{n}, \\ 0, & 1, & \frac{1}{n}, & g', \end{matrix}$$

ce qui prouve bien qu'on est dans le cas elliptique; et il y a deux intégrales réductibles aux intégrales elliptiques.

16. *Remarque I.* — Les considérations précédentes fournissent une nouvelle démonstration du théorème de Weierstrass-Picard ([1]) *sur la réduction des intégrales hyperelliptiques de genre deux aux intégrales elliptiques;* elles montrent également, ainsi que M. Picard l'a vérifié directement ([2]), que la forme de Weierstrass

$$h = \frac{m}{n} \qquad \text{ou} \qquad nh - m = 0$$

est équivalente à la forme $nh - 1 = 0$, car l'invariant est n^2 dans les deux cas.

17. *Remarque II.* — L'invariant Δ étant positif et de l'une des formes $4N$ ou $4N+1$ a pour plus petite valeur 1 : ce cas ne correspond pas à de véritables fonctions abéliennes, puisque le tableau des périodes peut se ramener, en faisant $n = 1$, à

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & 1, \\ 0, & 1, & 1, & g'; \end{matrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & 0, \\ 0, & 1, & 0, & g'; \end{matrix}$$

([1]) *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XI, p. 43.
([2]) *Ibid.,* t. XII, p. 153.

les fonctions hyperelliptiques correspondantes sont alors des combinaisons rationnelles *quelconques* de fonctions séparément elliptiques par rapport aux variables u et v.

18. *Intégrales réductibles.* — Lorsque Δ est un carré parfait, $\Delta = n^2$, on obtient les deux intégrales réductibles aux intégrales elliptiques par la formule $u + \lambda v$, où λ est choisi de manière que les périodes de $u + \lambda v$ se réduisent à deux : ces deux périodes, ω et ω', et la quantité λ vérifient les relations (21), d'où l'on a déduit la relation singulière (22).

Soit donc $Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0$ la relation entre les périodes; en écrivant qu'elle est identique à (22), on a

$$(23) \qquad \begin{cases} (nm)_{03} = \rho A, \\ (nm)_{13} - (nm)_{02} = \rho B, \\ -(nm)_{12} = \rho C, \\ (nm)_{01} = \rho D, \\ -(nm)_{23} = \rho E, \end{cases}$$

ρ étant un entier. Éliminant ω et ω' entre les équations (21) on trouve

$$(nm)_{12} - \lambda(nm)_{02} + (g + \lambda h)(nm)_{01} = 0,$$
$$(nm)_{13} - \lambda(nm)_{03} + (h + \lambda g')(nm)_{01} = 0.$$

Multiplions la seconde de ces relations par λ et ajoutons à la première, il vient, en tenant compte de (23),

$$-\rho C + \lambda\rho B + (g + \lambda h)\rho D - \lambda^2\rho A + \lambda(h + \lambda g')\rho D = 0,$$

ou, en ordonnant par rapport à λ,

$$\lambda^2(Dg' - A) + \lambda(2Dh + B) + Dg - C = 0,$$

ce qui donne pour λ les deux valeurs

$$\lambda = \frac{-2Dh - B \pm \sqrt{4D^2(h^2 - gg') + 4DBh + 4DAg + 4DCg' + B^2 - 4AC}}{2(Dg' - A)}.$$

En vertu de la relation $Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') = -E$, la quantité sous le radical est $B^2 - 4AC - 4DE$, c'est-à-dire Δ; donc

$$\lambda = \frac{-2Dh - B \pm \sqrt{\Delta}}{2(Dg' - A)}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\lambda} = \frac{-2Dh - B \pm \sqrt{\Delta}}{2(Dg - C)},$$

ce qui donne les deux valeurs cherchées de λ.

19. *Extension d'un théorème de M. Poincaré.* — M. Poincaré a montré que, s'il existe plus de deux intégrales réductibles aux intégrales elliptiques, il en existe une infinité : ce qui, dans notre langage, s'énonce ainsi :

S'il existe entre les périodes deux relations singulières pour chacune *desquelles l'invariant soit carré parfait, il existe une infinité de telles relations* [1].

Plus généralement, nous allons établir que :

S'il existe entre les périodes deux relations singulières dont l'une ait pour invariant un carré parfait, il y a une infinité de telles relations.

Soient, en effet, les relations

$$(24) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

$$(25) \qquad A_1 g + B_1 h + C_1 g' + D_1(h^2 - gg') + E_1 = 0,$$

où

$$\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$$

est le carré n^2.

On en déduit, en multipliant par les entiers ρ et σ et ajoutant, la nouvelle relation singulière

$$\begin{aligned} 0 = (A\rho + A_1\sigma)g + (B\rho + B_1\sigma)h \\ + (C\rho + C_1\sigma)g' + (D\rho + D_1\sigma)(h^2 - gg') + E\rho + E_1\sigma. \end{aligned}$$

[1] *American Journal of Mathematics*, t. VIII, p. 306.

dont l'invariant (à un facteur carré près) est

$$\Delta\rho^2 + M\rho\sigma + \Delta_1\sigma^2;$$

Δ_1 désigne l'invariant de la relation (25) et M une fonction de A, B, ..., E; A_1, ..., E_1, qu'il est inutile d'expliciter.

Le théorème est qu'on peut déterminer la fraction $\frac{\rho}{\sigma}$ d'une infinité de manières différentes, de telle sorte que le nombre $\Delta\rho^2 + M\rho\sigma + \Delta_1\sigma^2$ soit un carré; or on peut écrire ce nombre, en remplaçant Δ par n^2, et en désignant par θ un entier quelconque,

$$(n\rho + \theta\sigma)^2 + \sigma[M\rho + \Delta_1\sigma - 2n\theta\rho - \theta^2\sigma],$$

et ce sera un carré si l'on prend $\frac{\rho}{\sigma}$ de telle sorte que le terme entre crochets s'annule, c'est-à-dire si

$$\frac{\rho}{\theta^2 - \Delta_1} = \frac{\sigma}{M - 2n\theta}$$

d'où, puisque θ est quelconque, une infinité de solutions.

C. Q. F. D.

DEUXIÈME PARTIE.

Fonctions intermédiaires singulières.

20. Soit un système de périodes normales des variables u et v

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & h, \\ 0, & 1, & h, & g'; \end{matrix}$$

en changeant au besoin les signes de g, h, g' simultanément, on a le

droit de supposer que la partie imaginaire, g_1, de g est *positive;* il en sera de même de la partie imaginaire, g'_1, de g', à cause de l'inégalité nécessaire $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$.

A l'exemple de Briot et Bouquet [1] et de M. Poincaré [2], nous appellerons *fonction intermédiaire* toute fonction entière de u, v qui se reproduit, multipliée par une exponentielle $e^{\lambda u+\mu v+\nu}$, quand u, v augmentent d'une période.

En désignant par $f(u, v)$ une telle fonction, on a ainsi

$$\begin{aligned} f(u+1, v) &= e^{\lambda_1 u+\mu_1 v+\nu_1} f(u, v), \\ f(u, v+1) &= e^{\lambda_2 u+\mu_2 v+\nu_2} f(u, v), \\ f(u+g, v+h) &= e^{\lambda_3 u+\mu_3 v+\nu_3} f(u, v), \\ f(u+h, v+g') &= e^{\lambda_4 u+\mu_4 v+\nu_4} f(u, v). \end{aligned}$$

En multipliant $f(u,v)$ par une exponentielle $e^{au^2+buv+cv^2+du+fv}$, $a, b, \ldots$ étant des constantes, on peut évidemment disposer de ces constantes de manière que le produit de l'exponentielle par $f(u, v)$, produit que nous désignerons par $\varphi(u, v)$, vérifie les relations

$$\begin{aligned} \varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v), \\ \varphi(u, v+1) &= e^{\theta u} \varphi(u, v); \end{aligned}$$

il suffit pour cela de prendre

$$\begin{gathered} 2a = -\lambda_1, \qquad b = -\mu_1, \qquad d+a = -\nu_1, \\ 2c = -\mu_2, \qquad f+c = -\nu_2, \end{gathered}$$

θ est une constante, égale à $-\mu_1$.

La fonction $\varphi(u, v)$ satisfait donc aux conditions

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v), \\ \varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v) e^{\theta u}, \\ \varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v) e^{\lambda u+\mu v+\nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v) e^{\lambda' u+\mu' v+\nu'}. \end{aligned} \right.$$

---

[1] *Traité des fonctions elliptiques.*

[2] *American Journal of Mathematics*, t. VIII, p. 316.

Pour que les deux premières équations soient compatibles, il faut que

$$\theta = 2\pi i n,$$

n étant entier; de même, la première et la seconde combinées successivement avec les deux autres donnent

$$\lambda = -2\pi i l,\quad \lambda' = 2\pi i l',\quad \mu = 2\pi i(m - ng),\quad \mu' = 2\pi i(m' - nh),$$

l, l', m, m' étant entiers. Enfin la combinaison des deux dernières relations (1) donne

$$\lambda h + \mu g' = \lambda' g + \mu' h + 2q\pi i,$$

q étant entier. En remplaçant $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ par leurs valeurs ci-dessus, on trouve

$$l' g + (m' + l)h - mg' - n(h^2 - gg') + q = 0;$$

si donc les entiers $l', m' + l, m, n, q$ ne sont pas nuls à la fois, il existe entre g, h, g' une relation singulière.

Dans le cas où

$$l' = m' + l = m = n = q = 0,$$

les relations deviennent

$$\varphi(u + 1, v) = \varphi(u, v + 1) = \varphi(u, v),$$
$$\varphi(u + g, v + h) = e^{2\pi i l u + \nu}\varphi(u, v),$$
$$\varphi(u + h, v + g') = e^{-2\pi i l' v + \nu'}\varphi(u, v);$$

la fonction $\varphi(u, v)$ est alors une *fonction thêta*. Ainsi, dans le cas où il n'y a pas de relation singulière entre les périodes, les seules fonctions intermédiaires sont les fonctions thêta et leurs produits par des exponentielles $e^{au^2 + buv + \cdots}$.

21. Supposons, au contraire, qu'il y ait entre g, h, g' une relation singulière, et ramenons-la, par une transformation du premier ordre des périodes, à la forme

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0.$$

On a alors, en désignant par k un entier,

$$l = -\alpha k, \qquad m' + l = -\beta k, \qquad m = \gamma k, \qquad n - q = 0,$$

et les relations (1) s'écrivent

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) = e^{2\pi i[-lu+k\gamma v]+\nu}\varphi(u, v), \\ \varphi(u+h, v+g') = e^{2\pi i[-k\alpha u-(l+k\beta)v]+\nu'}\varphi(u, v). \end{cases}$$

Si k est nul, la fonction $\varphi(u, v)$ est une *fonction thêta d'ordre* l; si $k \gtrless 0$, il entre dans la définition de $\varphi(u, v)$ *deux* nombres entiers, l et k, que nous appellerons les *indices* de la *fonction intermédiaire singulière* $\varphi(u, v)$.

22. Considérons maintenant le déterminant δ des coefficients de u, v dans les exponentielles qui figurent aux seconds membres des deux dernières équations (2)

$$\delta = l(l+k\beta) + \alpha\gamma k^2 = l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2.$$

Je dis que, en général, δ *n'est pas nul*. Car, si $\delta = 0$, on a

$$\frac{l}{k} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2},$$

ce qui exige que $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, c'est-à-dire l'invariant Δ de la relation singulière entre les périodes, soit un carré parfait. Ainsi, δ *ne peut être nul que dans le cas elliptique*.

23. *Cas elliptique*. — Avant d'aller plus loin, supposons-nous placés dans le cas elliptique, l et k étant tels que $\delta = 0$, et étudions les fonctions $\varphi(u, v)$ correspondantes.

A cet effet, supposons $\gamma = 1$, comme nous en avons le droit, dans la relation entre les périodes; soit

$$\beta^2 - 4\alpha = n^2,$$

ce qui donne

$$\alpha = \frac{\beta^2 - n^2}{4}.$$

Les nombres β et n sont nécessairement de même parité.

On a pour $\frac{l}{k}$, en écrivant $\delta = 0$,

$$\frac{l}{k} = \frac{-\beta \pm n}{2}.$$

Supposons, par exemple,

$$\frac{l}{k} = -\frac{\beta + n}{2}.$$

Cela posé, nous savons qu'il y a deux fonctions de la forme $u + \lambda v$, ou $\frac{1}{\lambda} u + v$, qui n'ont que deux périodes : les deux valeurs correspondantes de $\frac{1}{\lambda}$ sont (nº **18**)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{-\beta \pm n}{-2}.$$

Prenons pour variables nouvelles, à la place de u et v, ces deux fonctions, en posant

$$n\mathrm{U} = v + \frac{\beta + n}{2} u,$$

$$n\mathrm{V} = v + \frac{\beta - n}{2} u;$$

la fonction $\varphi(u, v)$, qui vérifie les relations (2), devient une fonction $\chi(\mathrm{U}, \mathrm{V})$, et ces relations donnent sans difficulté

$$\chi\left(\mathrm{U} + \frac{1}{n}, \mathrm{V} + \frac{1}{n}\right) = \chi\left(\mathrm{U} + \frac{\beta + n}{2n}, \mathrm{V} + \frac{\beta - n}{2n}\right) = \chi(\mathrm{U}, \mathrm{V}),$$

$$\chi\left(\mathrm{U} + \frac{\beta + n}{2n} g + \frac{h}{n}, \mathrm{V} + \frac{\beta - n}{2n} g + \frac{h}{n}\right) = \chi(\mathrm{U}, \mathrm{V}) e^{2\pi i k n \mathrm{U} + \nu},$$

$$\chi\left(\mathrm{U} + \frac{\beta + n}{2n} h + \frac{g'}{n}, \mathrm{V} + \frac{\beta - n}{2n} h + \frac{g'}{n}\right) = \chi(\mathrm{U}, \mathrm{V}) e^{2\pi i k n \frac{n - \beta}{2} \mathrm{U} + \nu}.$$

Si l'on pose

$$\Omega = \frac{\beta + n}{2n} g + \frac{h}{n}, \qquad \Omega' = \frac{\beta - n}{2n} g + \frac{h}{n},$$

on déduit de là, en tenant compte de la relation singulière

$$(3) \qquad \frac{\beta^2 - n^2}{4} g + \beta h + g' = 0,$$

les équations nouvelles :

$$(4) \qquad \begin{cases} \chi(U+1, V) = \chi(U, V+1) = \chi(U, V), \\ \chi(U+\Omega, V+\Omega') = \chi(U, V)\, e^{2\pi i k n U + \nu}, \\ \chi\left(U + \frac{n-\beta}{2}\Omega, V - \frac{n+\beta}{2}\Omega'\right) = \chi(U, V)\, e^{2\pi i k n \frac{n-\beta}{2} U + \nu}. \end{cases}$$

La combinaison des deux dernières donne facilement

$$(5) \qquad \chi(U, V + n\Omega') = \chi(U, V) e^{\nu''},$$

ν'' étant une constante.

D'ailleurs $\chi(U, V)$ ayant, en vertu de (4), les périodes 1, 0; 0, 1, et étant une fonction entière, peut se développer par la formule de Fourier

$$(6) \qquad \chi(U, V) = \Sigma A_{pq} e^{2\pi i (pU + qV)}.$$

Exprimons que cette série vérifie (5); il vient, si $A_{pq} \gtrless 0$,

$$e^{2\pi i q n \Omega'} = e^{\nu''},$$

d'où, en remplaçant Ω' par sa valeur,

$$q\left[\frac{\beta - n}{2} g + h\right] = \frac{\nu''}{2\pi i} + E,$$

E étant un entier. Une telle relation ne peut avoir lieu pour deux valeurs q et q_0, de l'entier q; car on en déduirait, par soustraction,

$$(q - q_0)\left[\frac{\beta - n}{2} g + h\right] = E - E_0.$$

Soient alors g_1, h_1, g'_1 les parties imaginaires de g, h, g'; on aurait

$$h_1 = \frac{n-\beta}{2} g_1,$$

et de la relation (3) entre les périodes on tirerait

$$g'_1 = \left(\frac{n-\beta}{2}\right)^2 g_1,$$

d'où

$$h_1^2 - g_1 g'_1 = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse initiale.

Par suite, dans la série de Fourier (6), q est constant et égal à q_0: en supprimant le facteur $e^{2\pi i q_0 V}$, on voit que $\chi(U, V)$ est une fonction de la seule variable U, et les relations (4) montrent que c'est une fonction thêta.

Inversement, on établit sans difficulté qu'une fonction thêta (elliptique) de U vérifie des équations de la forme (2), avec $\delta = 0$.

Remarque. — Si l'on avait supposé

$$\frac{l}{k} = \frac{-\beta+n}{2},$$

on aurait trouvé de même une fonction thêta de la seule variable V.

Ainsi, *dans le cas elliptique, δ peut être nul; les fonctions intermédiaires correspondantes sont, à un facteur exponentiel près, des fonctions thêta elliptiques d'une seule variable.*

24. Laissant de côté le cas de ces fonctions thêta elliptiques, nous avons le droit de supposer δ différent de zéro; nos résultats s'appliqueront aussi bien au cas elliptique qu'au cas général.

Reprenons la relation entre les périodes sous la forme

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

et revenons aux équations (2) qui caractérisent une fonction intermédiaire singulière $\varphi(u, v)$, d'indices l et k; δ n'étant pas nul, on peut

faire le changement de variables

$$(7)\qquad \begin{cases} u = -(l+k\beta)\mathrm{U} - k\gamma\mathrm{V}, \\ v = \qquad\quad k\alpha\,\mathrm{U} - \quad l\mathrm{V}; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(8)\qquad \begin{cases} \delta\mathrm{U} = -lu + k\gamma v, \\ \delta\mathrm{V} = -k\alpha u - (l+k\beta)v, \end{cases} \qquad \delta = l^2 + \beta k l + \alpha\gamma k^2.$$

La fonction $\varphi(u, v)$ devient alors une fonction $\theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})$, et les deux premières équations (2) donnent

$$(9)\qquad \theta\left(\mathrm{U} - \frac{l}{\delta}, \mathrm{V} - \frac{k\alpha}{\delta}\right) = \theta\left(\mathrm{U} + \frac{k\gamma}{\delta}, \mathrm{V} - \frac{l+k\beta}{\delta}\right) = \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}),$$

d'où l'on déduit, en désignant par ρ et σ deux entiers arbitraires,

$$\theta\left(\mathrm{U} - \rho\frac{l}{\delta} + \sigma\frac{k\gamma}{\delta}, \mathrm{V} - \rho\frac{k\alpha}{\delta} - \sigma\frac{l+k\beta}{\delta}\right) = \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}).$$

En prenant $\rho = -l - k\beta$, $\sigma = k\alpha$, on a

$$\theta(\mathrm{U}+1, \mathrm{V}) = \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}),$$

et l'on voit de même que

$$\theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}+1) = \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}).$$

Enfin, si l'on pose

$$\mathrm{G} = \frac{-lg + k\gamma h}{\delta}, \qquad \mathrm{H} = \frac{-lh + k\gamma g'}{\delta} = \frac{-k\alpha g - (l+k\beta)h}{\delta}\ (^1),$$

$$\mathrm{G}' = \frac{-k\alpha h - (l+k\beta)g'}{\delta},$$

---

(1) Les deux valeurs de H sont les mêmes, en vertu de la relation

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0.$$

les deux dernières équations (2) donnent

$$(10)\qquad \begin{cases} \theta(U+G, V+H) = e^{2\pi i\delta U - \nu}\,\theta(U, V), \\ \theta(U+H, V+G') = e^{2\pi i\delta V + \nu'}\,\theta(U, V); \end{cases}$$

en y joignant

$$\theta(U+1, V) = \theta(U, V+1) = \theta(U, V),$$

on voit que $\theta(U, V)$ est une fonction *thêta, d'ordre* δ, aux périodes $1, 0$; $0, 1$; G, H; H, G'; mais ce n'est pas une fonction θ quelconque, à cause des relations (9) :

$$(9)\qquad \theta\left(U - \frac{l}{\delta}, V - \frac{k\alpha}{\delta}\right) = \theta\left(U + \frac{k\gamma}{\delta}, V - \frac{l+k\beta}{\delta}\right) = \theta(U, V).$$

25. *Conditions d'existence des fonctions intermédiaires singulières.* — Pour qu'il existe des fonctions thêta de U, V vérifiant (10), deux conditions sont nécessaires et suffisantes :

1° En désignant par G_1, H_1, G'_1 les parties imaginaires de G, H, G', il faut que $H_1^2 - G_1 G'_1 < 0$.

Or on a, en désignant par g_1, h_1, g'_1 les parties imaginaires de g, h, g',

$$G_1 = \frac{-lg_1 + k\gamma h_1}{\delta}, \qquad H_1 = \frac{-lh_1 + k\gamma g'_1}{\delta} = \frac{-k\alpha g_1 - (l+k\beta)h_1}{\delta},$$

$$G'_1 = \frac{-k\alpha h_1 - (l+k\beta)g'_1}{\delta},$$

d'où

$$H_1^2 - G_1 G'_1 = \frac{1}{\delta^2}[-lh_1 + k\gamma g'_1][-k\alpha g_1 - (l+k\beta)h_1]$$
$$- \frac{1}{\delta^2}[-lg_1 + k\gamma h_1][-k\alpha h_1 - (l+k\beta)g'_1] = \frac{1}{\delta^2}\delta(h_1^2 - g_1 g'_1),$$

et l'inégalité à vérifier devient, puisque $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$,

$$(11)\qquad \delta > 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 > 0.$$

2° En second lieu, il faut que δ, ordre de la fonction thêta, ait le

signe contraire à celui de la partie imaginaire de G, c'est-à-dire que G_1 soit négatif; ainsi

$$(12)\qquad -lg_1 + k\gamma h_1 < 0,$$

inégalité évidemment compatible avec la précédente, et sur laquelle nous reviendrons.

26. Si les inégalités (11) et (12) sont vérifiées, il existe des fonctions thêta, $\theta(U, V)$, satisfaisant aux relations (10); elles sont, comme l'on sait, fonctions linéaires et homogènes de δ^2 d'entre elles. Il reste à voir si, parmi ces fonctions, on peut en trouver qui vérifient les relations (9).

27. Observons d'abord, pour simplifier l'écriture, qu'en faisant le changement de variables $U = U_1 + \lambda$, $V = V_1 + \mu$, λ et μ étant des constantes, on peut déterminer ces constantes de manière que $\theta(U_1, V_1)$ satisfasse aux égalités (10), où ν et ν' ont des valeurs fixées à l'avance. On a donc le droit de supposer $\nu = 2\pi i \frac{G\delta}{2}$, $\nu' = 2\pi i \frac{G'\delta}{2}$, de sorte que la fonction $\theta(U, V)$ est telle que

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\theta(U+1, V) = \theta(U, V+1) = \theta(U, V),\\ &\theta(U+G, V+H) = e^{2\pi i\delta\left(U+\frac{G}{2}\right)}\theta(U, V),\\ &\theta(U+H, V+G') = e^{2\pi i\delta\left(V+\frac{G'}{2}\right)}\theta(U, V).\end{aligned}\right.$$

$$(14)\qquad \theta\left(U - \frac{l}{\delta}, V - \frac{k\alpha}{\delta}\right) = \theta\left(U + \frac{k\gamma}{\delta}, V - \frac{l + k\beta}{\delta}\right) = \theta(U, V).$$

Or on peut exprimer les fonctions $\theta(U, V)$ qui satisfont aux équations (13) en fonction linéaire et homogène des δ^2 fonctions $\Theta_{00}, \Theta_{01}, \ldots, \Theta_{pq}, \ldots (0 \leq p, q < \delta)$ définies par

$$(15)\qquad \Theta_{pq}(U, V) = \sum_\rho \sum_\sigma e^{2\pi i[(p+\rho\delta)U + (q+\sigma\delta)V]}\, e^{\frac{\pi i}{\delta}f(p+\rho\delta,\, q+\sigma\delta)},$$

ρ et σ variant par valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, et $f(x, y)$ désignant

la forme $-(Gx^2+2Hxy+G'y^2)$; on a mis le signe — devant $Gx^2+\ldots$ parce que la partie imaginaire, G_1, de G est négative.

Les fonctions Θ_{pq} vérifient les relations (13); de plus, il est évident que

$$(16)\qquad \begin{cases} \Theta_{pq}\left(U+\frac{1}{\delta}, V\right) = e^{2\pi i \frac{p}{\delta}}\Theta_{pq}(U, V), \\ \Theta_{pq}\left(U, V+\frac{1}{\delta}\right) = e^{2\pi i \frac{q}{\delta}}\Theta_{pq}(U, V). \end{cases}$$

Pour que Θ_{pq} satisfasse aux équations (14), il faut et il suffit que p et q soient choisis de manière que

$$(17)\qquad -lp - k\alpha q = m\delta, \qquad k\gamma p - (l+k\beta)q = n\delta,$$

m et n étant entiers; c'est-à-dire

$$(18)\qquad p = -m(l+k\beta) + nk\alpha, \qquad q = -mk\gamma - nl.$$

Combien y a-t-il de systèmes de valeurs de p et q de cette forme, compris entre o inclus et δ exclus?

Pour le voir, considérons p et q comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan; tous les points p, q représentés par les formules (18), où m et n prennent toutes les valeurs entières, sont les sommets d'un réseau de parallélogrammes, construit avec les périodes $-(l+k\beta)-ik\gamma$ et $k\alpha - il$, et dont un sommet est à l'origine. Tout revient à chercher combien il y a de ces sommets à l'intérieur du carré de côté δ construit sur les parties positives des axes : si l'on observe que les quatre sommets de ce carré sont des sommets du réseau (ce qui se reconnaît de suite), on en conclut que le nombre cherché est le quotient de l'aire du carré et de l'aire du parallélogramme. L'aire du carré est δ^2; celle du parallélogramme est $(l+k\beta)l+k\gamma k\alpha$, c'est-à-dire δ; il y a donc $\frac{\delta^2}{\delta}=\delta$ sommets du réseau dans le carré, l'origine étant comptée, mais non les trois autres sommets du carré.

Soient alors p_1, q_1; p_2, q_2; ...; p_δ, q_δ les δ systèmes de valeurs correspondantes de p, q; les δ fonctions

$$\Theta_{p_1q_1}(U, V), \quad \Theta_{p_2q_2}(U, V), \quad \ldots, \quad \Theta_{p_\delta q_\delta}(U, V),$$

satisfont seules, parmi les fonctions Θ_{pq}, aux équations (13) et (14):

en d'autres termes les fonctions entières qui vérifient ces équations s'expriment en fonction linéaire et homogène de δ d'entre elles.

Remontons maintenant des variables U, V aux variables u, v, nous avons ce théorème :

28. *Soit un système de périodes* $\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix}$, *telles qu'on ait la relation*

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

α, β, γ *étant entiers sans diviseur commun ; désignons par* g_1, h_1, g'_1 *les parties imaginaires de* g, h, g' *et supposons* $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$, g_1 *et* $g'_1 > 0$.

Soient l *et* k *deux entiers, tels que la quantité* $\delta = l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$ *soit positive et que* $-lg_1 + k\gamma h_1$ *soit négatif* [1]; *il existe des fonctions* intermédiaires singulières, $\varphi(u, v)$, *d'indices* l *et* k, *c'est-à-dire vérifiant les relations*

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)\, e^{2\pi i(-lu+k\gamma v)+\nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)\, e^{2\pi i(-k\alpha u-(l+k\beta)v)+\nu'}, \end{cases}$$

ν *et* ν' *désignant des constantes arbitraires données*. Ces fonctions s'expriment en fonction linéaire et homogène de δ d'entre elles.

Il serait aisé d'avoir le développement en série de chacune de ces δ fonctions, en se servant de celui de $\Theta_{pq}(U, V)$; nous trouverons plus loin des développements un peu plus généraux d'une manière directe.

29. *Remarque I.* — Reprenons les inégalités nécessaires

$$(11)\qquad l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 > 0,$$

$$(12)\qquad -lg_1 + k\gamma h_1 < 0.$$

La première s'écrit

$$(2l + \beta k)^2 - k^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) > 0,$$

et l'on sait (nº 14) que l'invariant $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ est > 0.

[1] On verra plus bas (nº 29) que ces deux conditions se réduisent à une seule.

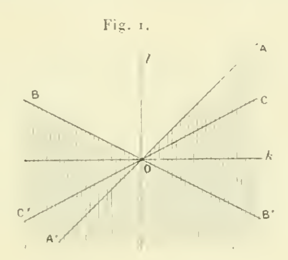
Regardons l et k comme les coordonnées d'un point dans un plan et construisons les deux droites *réelles* A'OA, B'OB qui ont pour équation $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 = 0$: elles passent par l'origine O.

Construisons de même la droite C'OC qui a pour équation

$$-lg_1 + k\gamma h_1 = 0;$$

je dis qu'elle est dans l'angle des droites A'OA et B'OB qui ne com-

Fig. 1.



prend pas l'axe des l. En effet, en substituant dans $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$ les valeurs $l = \infty$, $k = 0$, on trouve le signe $+$; en substituant $l = \gamma h_1$, $k = g_1$, on trouve

$$\gamma^2 h_1^2 + \gamma g_1(\beta h_1 + \alpha g_1),$$

c'est-à-dire, puisque $\alpha g_1 + \beta h_1 + \gamma g_1'$ est nul, $\gamma^2(h_1^2 - g_1 g_1')$, résultat négatif.

Il résulte de là que les deux inégalités (11) et (12) ne sont vérifiées que si le point l, k est dans l'angle BOA, qui comprend la partie *positive* de l'axe des l (région non ombrée) : g_1 est en effet > 0.

Comme il y a, dans cet angle, une infinité de points à coordonnées entières, il y a une infinité de systèmes de valeurs de l, k correspondant à des fonctions intermédiaires singulières.

Pour un quelconque de ces systèmes de valeurs, la quantité $2l + \beta k$ est positive : en effet, la droite $2l + \beta k = 0$ est dans la région ombrée, car en faisant $l = \beta$, $k = -2$ dans $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$, on trouve

$$-(\beta^2 - 4\alpha\gamma),$$

quantité négative; par suite, pour tous les points de l'angle BOA, $2l + \beta k$ est positif.

L'inégalité (11) : $(2l + \beta k)^2 - k^2\Delta > 0$ donne alors

$$(19) \qquad 2l + \beta k > \sqrt{\Delta} \bmod k$$

et il est clair, géométriquement, que cette inégalité, si elle est vérifiée, entraîne les inégalités (11) et (12) : c'est donc la seule à laquelle les indices l et k soient assujettis.

30. *Remarque II.* — Il résulte de ce qui précède que, si l, k est un système de valeurs vérifiant l'inégalité (19) et m un entier positif, les systèmes ml, mk et $l + m$, k vérifieront aussi cette inégalité.

On peut voir aussi que, si l', k' est un système analogue, la même propriété appartient au système $l + l'$, $k + k'$: cela résulte de ce que le produit de deux fonctions singulières d'indices l, k et l', k' est évidemment une fonction singulière d'indices $l + l'$, $k + k'$; c'est une fonction thêta si $k + k' = 0$.

31. *Remarque III.* — Si l, k vérifient l'inégalité (19), on pourra trouver une infinité d'entiers l'' tels que le système l'', $-k$ la vérifie aussi : cela résulte immédiatement de ce que la partie positive de l'axe des l est dans l'angle BOA. En d'autres termes, étant donnée une fonction intermédiaire singulière φ, on peut en trouver une infinité d'autres φ'' telles que le produit $\varphi\varphi''$ soit une fonction thêta.

Zéros communs à deux fonctions intermédiaires singulières.

32. Reprenons les relations de transformation du n° **24**

$$u = -(l + k\beta)U - k\gamma V,$$
$$v = \qquad k\alpha U - lV,$$

où

$$\delta U = -lu + k\gamma v,$$
$$\delta V = -k\alpha u - (l + k\beta)v.$$

Je dis qu'à un système (U, V), déterminé aux périodes près, ne correspond qu'un seul système (u, v), aux périodes près : car si l'on augmente U et V d'une période du tableau

$$\begin{matrix} 1, & 0, & G, & H, \\ 0, & 1, & H, & G', \end{matrix}$$

où

$$G = \frac{-lg + k\gamma h}{\delta},$$

$$H = \frac{-lh + k\gamma g'}{\delta} = \frac{-k\alpha g - (l + k\beta)h}{\delta},$$

$$G' = \frac{-k\alpha h - (l + k\beta)g'}{\delta},$$

on reconnaît immédiatement que u et v augmentent d'une période du tableau

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & h, \\ 0, & 1, & h, & g'. \end{matrix}$$

Inversement, je dis qu'à un système (u, v) correspondent δ systèmes U, V. Donnons, en effet, à u, v les valeurs

$$u + \theta + \rho g + \sigma h, \qquad v + \theta' + \rho h + \sigma g',$$

θ, θ', ρ, σ étant des entiers quelconques, il vient

$$U = \frac{-lu + k\gamma v}{\delta} + \frac{-l\theta + k\gamma\theta'}{\delta} + \rho\frac{-lg + k\gamma h}{\delta} + \sigma\frac{-lh + k\gamma g'}{\delta},$$

$$V = \frac{-k\alpha u - (l + k\beta)v}{\delta} + \frac{-k\alpha\theta - (l + k\beta)\theta'}{\delta},$$

$$+ \rho\frac{-k\alpha g - (l + k\beta)h}{\delta} + \sigma\frac{-k\alpha h - (l + k\beta)g'}{\delta}.$$

Les coefficients de ρ dans les deux seconds membres étant respectivement G et H, ceux de σ étant H et G', on peut supposer $\rho = 0$, $\sigma = 0$, sans changer U, V *aux périodes près;* tout revient ainsi à chercher combien on obtient de systèmes distincts aux périodes près

par les formules

$$U' = \frac{-l\theta + k\gamma\theta'}{\delta}, \qquad V' = \frac{-k\alpha\theta - (l+k\beta)\theta'}{\delta},$$

lorsque θ et θ' prennent toutes les valeurs entières.

Deux systèmes θ, θ' et θ_1, θ'_1 donnent le même système U', V' aux périodes près si

$$\frac{-l(\theta-\theta_1)+k\gamma(\theta'-\theta'_1)}{\delta} = m + \rho' G + \sigma' H,$$

$$\frac{-k\alpha(\theta-\theta_1)-(l+k\beta)(\theta'-\theta'_1)}{\delta} = n + \rho' H + \sigma' G'.$$

Les entiers ρ' et σ' sont nécessairement nuls, sinon, en égalant les parties imaginaires dans les deux membres, on trouverait

$$\rho' G_1 + \sigma' H_1 = 0, \qquad \rho' H_1 + \sigma' G'_1 = 0,$$

d'où $H_1^2 - G_1 G'_1 = 0$, ce qui est impossible (n° **25**). On a donc

$$\begin{aligned} -\ l(\theta-\theta_1)\ +\quad k\gamma(\theta'-\theta'_1) &= m\delta, \\ -k\alpha(\theta-\theta_1)-(l+k\beta)(\theta'-\theta'_1) &= n\delta, \end{aligned}$$

et l'on en conclut, comme au n° **27**, qu'en considérant θ et θ' comme les coordonnées d'un point, deux points θ, θ' et θ_1, θ'_1 donnent le même système (U', V') s'ils sont deux points homologues d'un réseau de parallélogrammes, et réciproquement.

Ce réseau est construit sur les périodes

$$-(l+k\beta)+ik\alpha, \qquad -k\gamma - il;$$

il a l'origine pour un de ses sommets, et l'aire de son parallélogramme est δ.

Il y aura autant de systèmes (U, V) correspondant à un système (u, v) qu'il y a de points (θ, θ') à coordonnées entières dans un parallélogramme du réseau ; or, l'aire du parallélogramme étant δ, ce nombre

de points est évidemment δ, en comptant l'origine et en excluant les trois autres sommets. Ainsi :

A un système (u, v) *correspondent* δ *systèmes* (U, V) *distincts aux périodes près.*

33. Il est maintenant facile de trouver le nombre de zéros communs à deux fonctions intermédiaires singulières ; c'est-à-dire le nombre des solutions communes aux deux équations $\varphi(u, v) = 0$, $\varphi_1(u, v) = 0$: deux solutions qui ne diffèrent que de périodes ne sont pas regardées comme distinctes.

Supposons que les deux fonctions intermédiaires considérées aient pour indices l, k et l', k' ; nous les représenterons par $\varphi_{l,k}$, $\varphi_{l',k'}$, et leur nombre de zéros communs par

$$N(l, k;\, l', k');$$

il est clair, en effet, qu'il ne dépend que des nombres l, k ; l', k'. [*Voir*, par exemple, le raisonnement de M. Poincaré pour trouver le nombre de zéros communs à deux fonctions thêta [1].]

34. Distinguons maintenant plusieurs cas.

1° Supposons $l' = l$, $k' = k$. En ce cas, la transformation employée au n° **24** change $\varphi_{l,k}$ et $\varphi_{l',k'}$ en deux fonctions thêta de U et V, d'ordre δ. Ces deux fonctions ayant, d'après M. Poincaré [2], $2\delta^2$ zéros communs, et δ systèmes (U, V) correspondant à un système (u, v), le nombre des zéros communs à $\varphi_{l,k}$ et $\varphi_{l',k'}$ est $\frac{2\delta^2}{\delta} = 2\delta$; on a donc

$$N(l, k;\, l, k) = 2l^2 + 2\beta kl + 2\alpha\gamma k^2. \tag{20}$$

2° Supposons $l' = 1$, $k' = 0$. La fonction $\varphi_{l',k'}$ est alors une fonction thêta, $\Im(u, v)$, du premier ordre ; si l'on désigne par $j(x)$ et $j_1(x)$ deux intégrales abéliennes de première espèce appartenant à la courbe de genre deux $f(x, y) = 0$, qui correspond au système de périodes

---

[1] *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. X.

[2] *Ibid.*

1, 0; 0, 1; g, h; h, g', on a identiquement

$$\Xi[j(x)+\nu,\ j_1(x)+\nu_1]=0,$$

ν et ν_1 étant des constantes.

D'après cela, le nombre des zéros communs à $\varphi_{l,k}(u,v)$ et à $\Xi(u,v)$ est le nombre des racines de l'équation

$$(21) \qquad \varphi_{l,k}[j(x)+\nu,\ j_1(x)+\nu_1]=0.$$

On sait trouver ce nombre lorsque $\varphi_{l,k}$ est une fonction thêta, c'est-à-dire une fonction admettant les périodes 1, 0; 0, 1 et telle que

$$\Theta(u+g,\ v+h)=e^{-2\pi i l u+\text{const}}\,\Theta(u,v),$$
$$\Theta(u+h,\ v+g')=e^{-2\pi i l v+\text{const}}\,\Theta(u,v);$$

on établit, dans la théorie des fonctions abéliennes, que le nombre cherché est la somme du coefficient de $-2\pi i u$ dans la première exponentielle et du coefficient de $-2\pi i v$ dans la seconde, c'est-à-dire $l+l$, ou $2l$. Le même raisonnement, *appliqué dans les mêmes termes* [1], à la fonction $\varphi_{l,k}$ qui a les périodes 1, 0; 0, 1 et qui satisfait à

$$\varphi_{l,k}(u+g,\ v+h)=e^{2\pi i(-lu+k\gamma v)+\text{const.}}\ \varphi_{l,k}(u,v),$$
$$\varphi_{l,k}(u+h,\ v+g')=e^{2\pi i(k\alpha u-(l+k\beta)v)+\text{const}}\ \varphi_{l,k}(u,v),$$

montre que le nombre des racines de l'équation (21) est encore la somme des coefficients de $-2\pi i u$ dans la première exponentielle et de $-2\pi i v$ dans la seconde, c'est-à-dire $l+l+\beta k=2l+\beta k$.

Ainsi

$$N(l,k;1,0)=2l+\beta k,$$

quantité qu'on sait être toujours positive (n° **29**).

Si l'on observe que le produit de l' fonctions thêta du premier ordre est une fonction thêta d'ordre l', il est clair que

$$(22) \qquad N(l,k;l',0)=l'(2l+\beta k)=2ll'+\beta kl'.$$

(1) *Voir*, par exemple, JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2e édition, t. II, p. 617-618.

3° Supposons $k' = k$. Soit, par exemple, $l > l'$. Le produit de $\varphi_{l',k}$ par une fonction thêta d'ordre $l - l'$ est une fonction $\varphi_{l,k}$, par suite

$$N(l, k; l', k) = N(l, k; l, k) - N(l, k; l - l', o)$$

d'où, en vertu de (20) et (22),

$$(23) \qquad N(l, k; l', k) = 2ll' + \beta k(l + l') + 2\alpha\gamma k^2.$$

4° Supposons l, k, l', k' quelconques, mais toutefois k et k' de même signe. Si m est entier et positif, la puissance m de $\varphi_{l,k}$ est une fonction $\varphi_{ml,mk}$, et, par suite,

$$N(ml, mk; nl', nk') = mn N(l, k; l', k'),$$

m et n étant entiers et positifs.

Prenons $m = \varepsilon k'$, $n = \varepsilon k$, ε étant $+1$ si k et $k' > o$, et ε étant -1 si k et $k' < o$; on a

$$N(l, k; l', k') = \frac{1}{kk'} N(\varepsilon k' l, \varepsilon kk'; \varepsilon kl', \varepsilon kk'),$$

et, d'après (23),

$$N(l, k; l', k') = \frac{1}{kk'} [2kk'll' + \beta\varepsilon kk'(\varepsilon k' l + \varepsilon kl') + 2\alpha\gamma k^2 k'^2],$$

c'est-à-dire

$$(24) \qquad N(l, k; l', k') = 2ll' + \beta(k' l + kl') + 2\alpha\gamma kk' \quad (\text{si } kk' > o).$$

5° Enfin, si l, k, l', k' sont quelconques et $k > o$, $k' < o$, en multipliant $\varphi_{l',k'}$ par $\varphi_{l'',-k'}$ le produit sera une fonction thêta $\varphi_{l'+l'',o}$: on a en effet observé (n° **51**) qu'on peut toujours trouver une infinité d'entiers l'' tels qu'il existe une fonction $\varphi_{l'',-k'}$. Il résulte de là que

$$N(l, k; l', k') = N(l, k; l' + l'', o) - N(l, k; l'', -k'),$$

et, d'après les formules (22) et (24)

$$N(l, k; l', k')$$
$$= 2l(l' + l'') + \beta k(l' + l'') - 2ll'' - \beta(-lk' + kl'') + 2\alpha\gamma kk'.$$

c'est-à-dire que, *dans tous les cas*,

$$(25)\qquad N(l, k; l', k') = 2ll' + \beta(k'l + kl') + 2\alpha\gamma kk',$$

formule générale qui contient toutes les précédentes.

55. *Remarque I.* — Il est aisé de vérifier que si l, k et l', k' satisfont, comme cela doit être, à l'inégalité (19), c'est-à-dire si les points l, k, et l', k' sont situés dans l'angle BOA (nº **29**), le nombre

$$2ll' + \beta(k'l + kl') + 2\alpha\gamma kk'$$

est toujours positif. Car la droite

$$2yl' + \beta(k'y + l'x) + 2\alpha\gamma xk' = 0,$$

où y et x sont les coordonnées courantes, est la polaire du point l', k' par rapport aux droites A'OA et B'OB; elle n'est donc pas dans l'angle AOB : si donc on substitue à y et x, dans le premier membre de l'équation de la droite, les coordonnées l, k et l', k' de deux points de cet angle, on obtient des résultats de même signe, c'est-à-dire que

$$[2ll' + \beta(k'l + kl') + 2\alpha\gamma kk'][2l^2 + 2\beta kl + 2\alpha\gamma k^2] > 0,$$

et le second facteur étant > 0, le premier l'est également.

56. *Remarque II.* — La formule générale (25) qui donne le nombre des zéros communs à deux fonctions intermédiaires singulières $\varphi_{l,k}$, $\varphi_{l',k'}$ s'applique au cas, exclu jusqu'ici (nº **24**) où $\varphi_{l,k}$ est une fonction thêta d'une seule variable (correspondant à un cas elliptique et à $\delta = 0$). Car si $\varphi_{l'',k''}$ est une fonction intermédiaire telle que δ'' ne soit pas nul, le produit $\varphi_{l,k}\varphi_{l'',k''}$ est une fonction intermédiaire qui n'est pas une fonction thêta d'une variable, et l'on a évidemment

$$\begin{aligned} N(l, k; l', k') &= N(l + l'', k + k''; l', k') - N(l'', k''; l', k'),\\ &= 2(l + l'')l' + \beta[(l + l'')k' + l'(k + k'')] + 2\alpha\gamma(k + k'')k'\\ &\quad - 2l''l' - \beta(l''k' + l'k'') - 2\alpha\gamma k'k'', \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$N(l, k; l', k') = 2ll' + \beta(k'l + kl') + 2\alpha\gamma kk'.$$

C. Q. F. D.

Fonctions intermédiaires normales.

37. Cherchons s'il peut exister des fonctions intermédiaires paires ou impaires en u et v.

La fonction intermédiaire la plus générale étant (n^os **20-21**) le produit d'une fonction $\varphi_{l,k}$ par une exponentielle $e^{au^2+buv+cv^2+du+fv}$, il s'agit de reconnaître si le produit $e^{du+fv}\varphi_{l,k}(u,v)$ peut être pair ou impair. En le désignant par $F_{l,k}(u,v)$, on voit que $F_{l,k}(u,v)$ satisfait aux relations

$$\begin{aligned}
F(u+1,v) &= A_1 F(u,v),\\
F(u,v+1) &= B_1 F(u,v),\\
F(u+g,v+h) &= A_2\, e^{2\pi i(-lu+k\gamma v)} F(u,v),\\
F(u+h,v+g') &= B_2\, e^{2\pi i[-k\alpha u-(l+k\beta)v]} F(u,v),
\end{aligned}$$

les A et B étant des constantes.

De plus $F(-u,-v) = \pm F(u,v)$; en exprimant que cette dernière relation est compatible avec chacune des précédentes, on trouve sans difficulté les valeurs des constantes A_1, B_1, A_2, B_2, de sorte que, en désignant par ω, ω', θ, θ' des nombres égaux à 0 ou 1, on obtient

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
F(u+1,v) &= e^{\omega\pi i} F(u,v),\\
F(u,v+1) &= e^{\omega'\pi i} F(u,v).\\
F(u+g,v+h) &= e^{\theta\pi i}\, e^{2\pi i(-lu+k\gamma v)+\pi i(-lg+k\gamma h)} F(u,v),\\
F(u+h,v+g') &= e^{\theta'\pi i}\, e^{2\pi i[-k\alpha u-(l+k\beta)v]+\pi i[-k\alpha h-(l+k\beta)g']} F(u,v).
\end{aligned}\right.$$

Ainsi les fonctions intermédiaires paires ou impaires, d'indices l et k, vérifient nécessairement les relations (26); inversement, nous appellerons *fonctions intermédiaires normales* celles qui satisfont à ces relations, *qu'elles soient ou non paires ou impaires*.

Nous dirons que la *caractéristique* de $F(u,v)$ est $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$.

Les fonctions normales de caractéristique nulle sont celles pour lesquelles $\omega = \omega' = \theta = \theta' = 0$.

58. Nous aurons besoin des fonctions intermédiaires normales pour étudier les courbes tracées sur les surfaces de Kummer singulières et former l'équation aux modules qui correspond à une relation singulière entre les périodes; en particulier, nous étudierons celles des fonctions normales qui sont paires ou impaires et nous rechercherons pour quelles demi-périodes elles s'annulent.

A cet effet, nous commencerons par indiquer le développement en série d'une fonction normale.

Développements en série.

59. La fonction normale $F(u, v)$, d'indices l et k, qui vérifie les deux premières relations (26) peut se développer en série de Fourier sous la forme

$$F(u, v) = \sum_{m,n} A_{m,n}\, e^{2\pi i\left(m+\frac{\omega}{2}\right)u + 2\pi i\left(n+\frac{\omega'}{2}\right)v}.$$

Pour abréger les calculs ultérieurs, nous poserons

$$A_{m,n} = B_{m,n}\, e^{\pi i\left[G_0\left(m+\frac{\omega}{2}\right)^2 + 2H_0\left(m+\frac{\omega}{2}\right)\left(n+\frac{\omega}{2}\right) + G'_0\left(n+\frac{\omega'}{2}\right)^2\right]},$$

où G_0, H_0, G'_0 désignent les quantités

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} G_0 &= \frac{(l+k\beta)g + k\gamma h}{\delta}, \\ H_0 &= \frac{-k\alpha g + lh}{\delta} = \frac{(l+k\beta)h + k\gamma g'}{\delta}, \\ G'_0 &= \frac{-k\alpha h + lg'}{\delta}. \end{aligned}\right.$$

On déduit de là

$$\begin{aligned} g &= lG_0 - k\gamma H_0, \\ h &= k\alpha G_0 + (l+k\beta) H_0 = lH_0 - k\gamma G_0, \\ g' &= k\alpha H_0 + (l+k\beta) G'_0. \end{aligned}$$

Le terme général de la série $F(u, v)$ s'écrit ainsi

$$B_{m,n}\, e^{2\pi i\left(m+\frac{\omega}{2}\right)u+2\pi i\left(n+\frac{\omega'}{2}\right)v}\, e^{\pi i\left[G_0\left(m+\frac{\omega}{2}\right)^2+2H_0\left(m+\frac{\omega}{2}\right)\left(n+\frac{\omega}{2}\right)+G'_0\left(n+\frac{\omega'}{2}\right)^2\right]},$$

ce que nous écrirons également

$$B_{m,n}\, T_{m,n}(u, v).$$

Exprimons maintenant que $F(u, v)$ vérifie la troisième des relations (26), c'est-à-dire que

$$e^{\theta\pi i}\, B_{m,n}\, T_{m,n}\, e^{2\pi i\left[\left(m+\frac{\omega}{2}\right)g+\left(n+\frac{\omega'}{2}\right)h\right]}$$
$$= B_{m+l,n-k\gamma}\, T_{m+l,n-k\gamma}\, e^{2\pi i\left(-lu+k\gamma v-\frac{1}{2}lg+\frac{1}{2}k\gamma h\right)}.$$

Les exponentielles en u et v se détruisent dans les deux membres et il reste, après un calcul qui ne présente aucune difficulté,

$$B_{m,n} = e^{\theta\pi i}\, B_{m+l,n-k\gamma}.$$

De même, en exprimant que $F(u, v)$ vérifie la quatrième des relations (26), on trouve

$$B_{m,n} = e^{\theta'\pi i}\, B_{m+k\alpha,n+l+k\beta}.$$

Enfin, si l'on pose

$$B_{m,n} = C_{m,n}\, e^{\frac{\pi i}{\delta}[\theta(m(l+k\beta)-nk\alpha)+\theta'(mk\gamma+nl)]},$$

on a

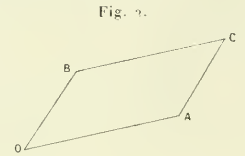
$$C_{m,n} = C_{m+l,n-k\gamma} = C_{m+k\alpha,n+l+k\beta}.$$

Ainsi $C_{m,n}$ ne change pas quand on augmente m et n de l et $-k\gamma$, ou de $k\alpha$ et $l+k\beta$; géométriquement, si m, n sont les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan, $C_{m,n}$ a la même valeur en tous les points homologues d'un réseau de parallélogrammes, construit sur les périodes $l-ik\gamma$, $k\alpha+i(l+k\beta)$. Construisons ce réseau à partir de l'origine, et appelons *parallélogramme principal* celui qui a pour sommets les points O, A, B, C de coordonnées :

O : $x=0$, $y=0$; B : $x=k\alpha$, $y=l+k\beta$;
A : $x=l$, $y=-k\gamma$; C : $x=l+k\alpha$, $y=-k\gamma+l+k\beta$.

L'aire de ce parallélogramme est δ, il y a donc, à son intérieur et sur les côtés OA, OB, δ points de coordonnées entières; soit p, q un

Fig. 2.



de ces points (parmi lesquels figure l'origine); à ce point et aux points homologues dans le réseau correspondent, dans $F(u, v)$, les termes pour lesquels $m = p + l\rho + k\alpha\sigma$, $n = q - k\gamma\rho + (l + k\beta)\sigma$, ρ et σ étant des entiers quelconques. La somme de ces termes est, à un facteur constant près, la série $\Phi_{p,q}(u, v)$:

$$\sum_{\rho,\sigma} e^{2\pi i\left(p+l\rho+k\alpha\sigma+\frac{\omega}{2}\right)u+2\pi i\left[q-k\gamma\rho+(l+k\beta)\sigma+\frac{\omega'}{2}\right]v}$$
$$\times e^{\pi i(\rho\theta+\sigma\theta')} e^{\pi i f\left(p+l\rho+k\alpha\sigma+\frac{\omega}{2},\, q-k\gamma\rho+(l+k\beta)\sigma+\frac{\omega'}{2}\right)},$$

$f(x, y)$ désignant la forme

$$G_0 x^2 + 2H_0 xy + G'_0 y^2.$$

Comme p et q peuvent recevoir δ systèmes de valeurs, correspondant aux points à coordonnées entières du parallélogramme principal, on voit que toute fonction singulière normale, d'indices l et k, $F(u, v)$, est une *fonction linéaire et homogène, quelconque d'ailleurs, des δ séries correspondantes* $\Phi_{p,q}$. Ces séries sont *convergentes*, car si l'on désigne par G_1, H_1, G'_1 les parties imaginaires de G_0, H_0, G'_0, je dis que

$$H_1^2 - G_1 G'_1 < 0 \quad \text{et} \quad G_1 > 0.$$

En effet, d'après (27),

$$\begin{aligned}\delta^2(H_1^2 - G_1G'_1) &= [-k\alpha g_1 + lh_1][(l+k\beta)h_1 + k\gamma g'_1] \\ &\quad - [(l+k\beta)g_1 + k\gamma h_1][-k\alpha h_1 + lg'_1] = (h_1^2 - g_1g'_1)\delta,\end{aligned}$$

ce qui démontre la première inégalité. Reste à établir que

$$(l + k\beta) g_1 + k\gamma h_1 > 0.$$

Or, l et k étant des coordonnées courantes, la droite

$$(l + k\beta) g_1 + k\gamma h_1 = 0$$

n'est pas dans l'angle BOA (n° **29**), car, si l'on fait $l = \beta g_1 + \gamma h_1$, $k = - g_1$ dans le trinôme $l^2 + \beta kl + k^2 \alpha\gamma$, on trouve $\gamma^2(h_1^2 - g_1 g'_1)$, résultat négatif. Comme g_1 est > 0, l'expression $lg_1 + k(\beta g_1 + \gamma h_1)$ est positive pour tous les points l, k de l'angle BOA, ce qui établit la proposition.

Les δ fonctions $\Phi_{p,q}$ sont évidemment distinctes linéairement.

Remarque. — Dans toute la suite de ce Mémoire, nous supposerons, comme nous en avons le droit, $\gamma = 1$, c'est-à-dire que nous ramènerons la relation singulière entre les périodes à la forme

$$\alpha g + \beta h + g' = 0.$$

Fonctions normales singulières paires et impaires.

40. Cherchons maintenant s'il y a des fonctions normales paires ou impaires. Plusieurs cas sont à distinguer.

41. *Caractéristique nulle.* — On a

$$\omega = \omega' = \theta = \theta' = 0;$$

la fonction $\Phi_{p,q}(u, v)$ est

$$\Phi_{p,q}(u, v) = \sum_{\rho, \sigma} e^{2\pi i (p + l\rho + k\alpha\sigma) u + 2\pi i [q - k\rho + (l + k\beta)\sigma]} e^{\pi i f (p + l\rho + k\alpha\sigma, q - k\rho + (l + k\beta)\sigma}.$$

Si ε et ε' désignent des entiers quelconques, il est clair qu'on ne

change pas $\Phi_{p,q}$ en changeant p en

$$p+\varepsilon l+\varepsilon' k\alpha$$

et q en

$$q-\varepsilon k+\varepsilon'(l+k\beta),$$

car cela revient à augmenter ρ et σ de ε et ε'.

Maintenant changeons dans $\Phi_{p,q}(u,v)$ les signes de u et v : cela revient à changer simultanément les signes de p, q, ρ, σ, sans altérer u et v, et, par suite,

$$(28)\qquad \Phi_{p,q}(-u,-v)=\Phi_{-p,-q}(u,v)$$

et, d'après la remarque précédente, pour que $\Phi_{p,q}(u,v)$ soit paire, il faut et il suffit que

$$p=-p+\varepsilon l+\varepsilon' k\alpha,\qquad q=-q-\varepsilon k+\varepsilon'(l+k\beta),$$

c'est-à-dire

$$(29)\qquad 2p=\varepsilon l+\varepsilon' k\alpha,\qquad 2q=-\varepsilon k+\varepsilon'(l+k\beta).$$

On peut supposer, sans diminuer la généralité, que ε et ε' sont égaux à 0 ou à 1 ; car augmenter ε, par exemple, de 2, revient à augmenter p et q de l et $-k$, ce qui ne change pas la fonction $\Phi_{p,q}$. En d'autres termes, on trouvera les fonctions $\Phi_{p,q}$ paires en prenant les valeurs entières de p et de q données par les équations (29) où ε et ε' désignent 0 ou 1; il n'y a pas de fonction $\Phi_{p,q}$ impaire.

On voit que les équations (29) sont toujours satisfaites pour $\varepsilon=\varepsilon=0$, $p=q=0$, c'est-à-dire que $\Phi_{0,0}$ est toujours paire. Résolvons ces équations par rapport à ε et ε' :

$$(30)\qquad \begin{cases} \varepsilon\delta=2p(l+k\beta)-2qk\alpha,\\ \varepsilon'\delta=2pk\qquad\qquad\;\, +2ql.\end{cases}$$

42. Faisons maintenant des hypothèses :

1° δ (c'est-à-dire $l^2+\beta kl+\alpha k^2$) *est impair*. — Les relations (30) montrent que ε et ε' sont pairs, c'est-à-dire $\varepsilon=\varepsilon'=0$.

Il n'y a donc pas d'autre fonction $\Phi_{p,q}$ paire que $\Phi_{0,0}$. Mais la somme

de $\Phi_{p,q}(u,v)$ et $\Phi_{-p,-q}(u,v)$ est paire, d'après (28), et la différence impaire. On voit ainsi qu'il existe $1+\frac{\delta-1}{2}=\frac{\delta+1}{2}$ fonctions normales paires d'indices l, k, et $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions impaires, linéairement distinctes.

2° δ *est pair*. — Ce cas se subdivise en deux autres :

a. — *k pair*, *l* (nécessairement) *pair*. — Les équations (29) donnent des valeurs entières de p, q pour les quatre systèmes de valeurs (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) de ε et ε' : il y a donc quatre fonctions $\Phi_{p,q}$ paires; les $\delta-4$ autres combinées deux à deux donnent $\frac{\delta-4}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta-4}{2}$ impaires. Donc, on a finalement $\frac{\delta+4}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta-4}{2}$ impaires, linéairement distinctes.

b. — *k impair*. — Alors δ, c'est-à-dire $l^2+\beta kl+\alpha k^2$ étant pair, α est de la parité de $l^2+\beta l$ ou $l(l+\beta)$.

Les équations (29) s'écrivent *suivant le module* 2 :

$$0\equiv\varepsilon l+\varepsilon' l(l+\beta),\qquad 0\equiv\varepsilon+\varepsilon'(l+\beta)\qquad (\text{mod } 2).$$

Quelle que soit la parité de l, elles se réduisent à une seule, la seconde. On peut donc faire $\varepsilon'=0$ ou 1, ε s'en déduit : il y a donc deux fonctions $\Phi_{p,q}$ paires, et, par suite, on a $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions impaires, linéairement distinctes.

Ainsi, en résumé :

Nombre des fonctions normales singulières d'indices l, k et de caractéristique nulle.

		Paires.	Impaires.	
δ *impair*		$\frac{\delta+1}{2}$	$\frac{\delta-1}{2}$	
δ *pair*	*k pair*	$\frac{\delta+4}{2}$	$\frac{\delta-4}{2}$	$(\delta=l^2+\beta kl+\alpha k^2)$
	k impair	$\frac{\delta+2}{2}$	$\frac{\delta-2}{2}$	

45. *Caractéristique quelconque.* — La fonction $\Phi_{p,q}$ a pour expression

$$\Phi_{p,q}(u, v) = \sum_{\rho,\sigma} e^{2\pi i\left(p+l\rho+k\alpha\sigma+\frac{\omega}{2}\right)u+2\pi i\left[q-k\rho+(l+k\beta)\sigma+\frac{\omega'}{2}\right]v}$$
$$\times e^{\pi i(\rho\theta+\sigma\theta')}\, e^{\pi i f\left(p+l\rho+k\alpha\sigma+\frac{\omega}{2},\; q-k\rho+(l+k\beta)\sigma+\frac{\omega'}{2}\right)}.$$

Si ε et ε' sont des entiers quelconques, on voit que, si l'on change p et q en $p+\varepsilon l+\varepsilon' k\alpha$ et $q-\varepsilon k+\varepsilon'(l+k\beta)$, cela revient à changer ρ et σ en $\rho+\varepsilon$, $\sigma+\varepsilon'$ dans la première et la troisième exponentielle : $\Phi_{p,q}$ se reproduit donc multiplié par le facteur $e^{\pi i(\varepsilon\theta+\varepsilon'\theta')}$, qui est égal à ± 1.

Changeons maintenant u, v en $-u$, $-v$: cela revient à changer simultanément p, q, ρ, σ en $-p-\omega$, $-q-\omega'$, $-\rho$, $-\sigma$, dans la première et la troisième exponentielle; comme la deuxième demeure inaltérée par ce changement, on voit que

$$\Phi_{p,q}(-u, -v) = \Phi_{-p-\omega,-q-\omega}(u, v).$$

Par suite, pour que $\Phi_{p,q}(u,v)$ soit paire ou impaire, il faut et il suffit qu'on ait, en désignant par ε, ε' deux entiers égaux à 0 ou 1 :

$$p = -p-\omega+\varepsilon l+\varepsilon' k\alpha,$$
$$q = -q-\varepsilon k+\varepsilon'(l+k\beta);$$

$\Phi_{p,q}$ sera paire si $e^{\pi i(\varepsilon\theta+\varepsilon\theta')} = 1$, impaire si $= -1$.

Les relations précédentes s'écrivent

$$(31)\qquad \begin{cases} 2p+\omega = \varepsilon l + \varepsilon' k\alpha, \\ 2q+\omega' = -\varepsilon k + \varepsilon'(l+k\beta), \end{cases}$$

d'où

$$(32)\qquad \begin{cases} \varepsilon\delta = (2p+\omega)(l+k\beta) - (2q+\omega')k\alpha, \\ \varepsilon'\delta = (2p+\omega)k + (2q+\omega')l. \end{cases}$$

44. Distinguons deux cas :

1° δ *impair*. — Les relations (32) donnent alors, suivant le module 2,

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon &\equiv \omega(l+k\beta)-\omega' k\alpha\\ \varepsilon' &\equiv \omega k \qquad\quad +\omega' l\end{aligned}\right\} \pmod 2;$$

ce qui donne un seul système de valeurs pour ε et ε', c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule fonction $\Phi_{p,q}$ paire ou impaire.

Elle est paire si $\varepsilon\theta+\varepsilon'\theta'\equiv 0 \pmod 2$, c'est-à-dire si

$$\omega[(l+k\beta)\theta+k\theta']+\omega'[-k\alpha\theta+l\theta']\equiv 0 \pmod 2,$$

et impaire dans le cas contraire. Il y a donc, par un raisonnement déjà fait, $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions normales impaires, ou inversement.

2° δ *pair*. — Subdivisons encore ce cas en deux :

a. — k *pair*, l (nécessairement) *pair*. — Les relations (31) donnent, suivant le module 2,

$$\omega\equiv 0, \qquad \omega'\equiv 0,$$

c'est-à-dire $\omega=\omega'=0$. Si donc ω et ω' ne sont pas nuls à la fois, il n'y a pas de fonction $\Phi_{p,q}$ paire ou impaire; c'est-à-dire qu'il y a $\frac{\delta}{2}$ fonctions normales paires, et autant d'impaires.

Si $\omega=\omega'=0$, on peut satisfaire aux équations (31) en prenant ε et ε' égaux à volonté à 0 ou 1; il y a donc quatre fonctions $\Phi_{p,q}$ qui sont paires ou impaires, selon la parité de $\varepsilon\theta+\varepsilon'\theta'$, c'est-à-dire suivant la parité des quatre nombres 0, θ, θ', $\theta+\theta'$. Comme θ et θ' ne sont pas nuls simultanément, puisque la caractéristique n'est pas nulle, deux de ces quatre nombres sont pairs et deux impairs. Donc il y a deux fonctions $\Phi_{p,q}$ paires et deux impaires; par suite, il y a $2+\frac{\delta-4}{2}=\frac{\delta}{2}$ fonctions normales paires et autant d'impaires.

En résumé, dans le cas de δ pair et k pair, il y a $\frac{\delta}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta}{2}$ impaires, linéairement distinctes.

b. — *k impair*. — En ce cas, δ étant pair, on a

$$\alpha \equiv l(l+\beta) \qquad (\text{mod } 2),$$

et les équations (31) s'écrivent, suivant le module 2,

$$(33) \qquad \begin{cases} \omega \equiv \varepsilon l + \varepsilon' l(l+\beta) \\ \omega' \equiv \varepsilon + \varepsilon' (l+\beta) \end{cases} \qquad (\text{mod } 2);$$

on en conclut

$$\omega \equiv l\omega' \qquad (\text{mod } 2).$$

Si donc ω n'est pas de même parité que $l\omega'$, il n'y a pas de fonction $\Phi_{p,q}$ paire ou impaire, et, par suite, il existe $\frac{\delta}{2}$ fonctions normales paires et autant d'impaires, linéairement distinctes.

Si $\omega' \equiv l\omega'$ (mod 2), la première équation (33) est une conséquence de la seconde, qui donne

$$\varepsilon \equiv \omega' + \varepsilon'(l+\beta) \qquad (\text{mod } 2).$$

On peut donc prendre $\varepsilon' = 0$ et 1 : on a deux valeurs correspondantes de ε, et par suite deux fonctions $\Phi_{p,q}$ paires ou impaires, selon la parité de $\varepsilon\theta + \varepsilon'\theta'$, c'est-à-dire du nombre

$$\theta\omega' + \varepsilon'[\theta' + \theta(l+\beta)].$$

Si $\theta' + \theta(l+\beta)$ est impair, la parité de ce nombre change avec celle de ε', de sorte qu'il y a une fonction $\Phi_{p,q}$ paire et une impaire, d'où $\frac{\delta}{2}$ fonctions normales paires et autant d'impaires.

Si $\theta' + \theta(l+\beta)$ est pair, les deux fonctions $\Phi_{p,q}$ sont paires lorsque $\theta\omega'$ est pair; elles sont impaires dans le cas contraire. On a donc $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta-2}{2}$ impaires, ou inversement, selon que $\theta\omega'$ est pair ou impair.

45. Le tableau suivant résume tous ces résultats.

Nombre des fonctions normales singulières d'indices l, k, et de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \theta \\ \omega' & \theta' \end{vmatrix}$, *non nulle.*

			Paires.	Impaires.	
δ *impair*	$\omega[(l+k\beta)\theta+k\theta']+\omega'[-k\alpha\theta+l\theta']$ *pair*...		$\frac{\delta+1}{2}$	$\frac{\delta-1}{2}$	
	id.	*impair*..	$\frac{\delta-1}{2}$	$\frac{\delta+1}{2}$	
δ *pair*	k *pair*...............................		$\frac{\delta}{2}$	$\frac{\delta}{2}$	$(\delta=l^2+\beta kl+\alpha k^2)$
	k *impair*..............................		$\frac{\delta}{2}$	$\frac{\delta}{2}$	
	toutefois si k *impair*, $\omega+l\omega'$ et $\theta'+\theta(l+\beta)$ *pairs*	$\theta\omega'$ *pair*....	$\frac{\delta+2}{2}$	$\frac{\delta-2}{2}$	
		$\theta\omega'$ *impair*..	$\frac{\delta-2}{2}$	$\frac{\delta+2}{2}$	

Ces résultats supposent que la relation singulière entre g, h, g' a été ramenée à $\alpha g+\beta h+g'=0$; l et k sont les deux indices des fonctions considérées, et $\delta=l^2+\beta kl+\alpha k^2$.

46. Remarque I. — Désignons par $F(u,v)$ une fonction normale, d'indices l, k, de caractéristique nulle, et qui soit paire ou impaire; considérons la demi-période

$$\frac{\mathfrak{A}}{2}=\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\lambda g+\frac{1}{2}\lambda' h,\qquad \frac{\mathfrak{A}'}{2}=\frac{1}{2}\varepsilon'+\frac{1}{2}\lambda h+\frac{1}{2}\lambda' g',$$

où ε, ε', λ, λ' sont 0 ou 1; et posons

$$(34)\qquad \psi(u,v)=e^{\pi i\{(l\lambda+k\alpha\lambda')u+[-k\lambda+(l+k\beta)\lambda']v\}}\,F\left(u+\frac{\mathfrak{A}}{2},\ v+\frac{\mathfrak{A}'}{2}\right).$$

On vérifie aisément que $\psi(u,v)$ est une fonction normale, soit paire, soit impaire, d'indices l, k, et dont la caractéristique est dé-

finie par

$$(35)\left\{\begin{array}{ll}\omega \equiv \quad l\lambda + k\alpha\lambda & \theta \equiv -l\varepsilon + k\varepsilon' \\ \omega' \equiv -k\lambda + (l+k\beta)\lambda', & \theta' \equiv -k\alpha\varepsilon - (l+k\beta)\varepsilon'\end{array}\right. \pmod 2.$$

Inversement, si l'on se donne ω, θ, ω', θ', *et si l'on suppose δ impair*, ces équations donnent toujours pour λ, λ' et ε, ε' des valeurs entières (0 ou 1), car le déterminant $\delta \equiv 1 \pmod 2$, par hypothèse. On en conclut, puisque les δ fonctions normales d'indices l, k, et de caractéristique donnée quelconque, se divisent en $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions impaires (ou inversement, n° 45) : 1° que les $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions du premier groupe se déduisent des $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions paires de mêmes indices et de caractéristique nulle par l'addition à u, v d'une même demi-période ; 2° que les $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions du second groupe se déduisent des $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions impaires de caractéristique nulle par l'addition de la même demi-période, le tout à un même facteur exponentiel près (34).

Aux quinze demi-périodes, autres que $u=0$, $v=0$, correspondent ainsi les fonctions des quinze caractéristiques non nulles.

47. Remarque II. — *Supposons δ pair et k impair.* Les δ fonctions normales d'indices l, k et de caractéristique $\begin{vmatrix}\omega & \omega' \\ \theta & \theta'\end{vmatrix}$ se divisent en $\frac{\delta}{2}$ paires et $\frac{\delta}{2}$ impaires, sauf pour les caractéristiques qui vérifient les congruences

$$\omega \equiv l\omega', \qquad \theta' \equiv \theta(l+\beta) \qquad \pmod 2,$$

(n° 45).

Ces caractéristiques *remarquables* sont au nombre de quatre, à savoir :

$$\begin{array}{lcccc}\omega \equiv & 0 & 0 & l & l \\ \omega' \equiv & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \theta \equiv & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \theta' \equiv & 0 & l+\beta & 0 & l+\beta\end{array} \qquad \pmod 2,$$

parmi elles figure la caractéristique nulle.

Supposons alors que, dans la formule (34), $F(u, v)$ désigne une fonction normale, paire ou impaire, d'indices l, k et de caractéristique nulle; la caractéristique de $\psi(u, v)$ sera, en faisant $k = 1$ dans (35) et $\alpha = l(l+\beta)$:

$$\begin{aligned} \omega &\equiv l[\lambda + (l+\beta)\lambda'], & \theta &\equiv l\varepsilon + \varepsilon' \\ \omega' &\equiv \lambda + (l+\beta)\lambda', & \theta' &\equiv (l+\beta)(l\varepsilon + \varepsilon') \end{aligned} \pmod 2,$$

c'est-à-dire que

$$\omega \equiv l\omega', \qquad \theta' \equiv \theta(l+\beta);$$

$\psi(u, v)$ appartient donc à une des *quatre caractéristiques remarquables*. On déduit de là, sans difficulté, les résultats suivants :

1° Si l'on augmente u, v d'une des quatre demi-périodes telles que

$$\lambda + (l+\beta)\lambda' \equiv 0, \qquad l\varepsilon + \varepsilon' \equiv 0,$$

c'est-à-dire d'une des quatre demi-périodes définies par

$$\begin{array}{lcccc} \varepsilon \equiv & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \varepsilon' \equiv & 0 & 0 & l & l \\ \lambda \equiv & 0 & l+\beta & 0 & l+\beta \\ \lambda' \equiv & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \pmod 2,$$

les fonctions singulières paires (ou impaires) de mêmes indices l, k, ayant une des quatre caractéristiques remarquables, se transforment respectivement les unes dans les autres.

2° Les δ fonctions normales d'indices (l, k), de l'une des trois caractéristiques remarquables, autre que la caractéristique nulle, se divisent en $\frac{\delta+2}{2}$ paires et $\frac{\delta-2}{2}$ impaires, ou inversement (n° 45): les $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions se déduisent des $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions paires de caractéristique nulle par l'addition à u, v d'une même demi-période; et les $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions se déduisent des $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions impaires de caractéris-

tique nulle par l'addition de la même demi-période. Il y a d'ailleurs quatre demi-périodes répondant à la question.

TROISIÈME PARTIE.

Courbes singulières sur les surfaces de Kummer.

48. Considérons une surface hyperelliptique singulière quelconque, c'est-à-dire une surface pour laquelle les coordonnées d'un point sont des fonctions abéliennes singulières de deux paramètres, u et v.

Dans mon Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques (ce Journal, t. IX, 4e série, p. 42 et 43), j'ai reconnu, en partant d'un important théorème de M. Appell (1), que l'équation de toute courbe algébrique, tracée sur une quelconque de ces surfaces, s'obtient en égalant à zéro une fonction intermédiaire, et réciproquement.

Si la surface hyperelliptique est singulière, elle admettra donc des courbes algébriques qui n'existent pas dans le cas général, et qu'on obtient en annulant les fonctions intermédiaires singulières; ce sont ces *courbes singulières* que nous allons maintenant étudier, en supposant que la surface hyperelliptique sur laquelle elles sont tracées est une *surface de Kummer*.

49. Nous représenterons paramétriquement la surface de Kummer par le procédé de M. Weber (*Crelle*, t. 84) : les coordonnées homogènes x, y, z, t d'un point sont des fonctions thêta du second ordre, normales et à caractéristique nulle. Ces fonctions étant toutes paires, à un point de la surface de Kummer $\mathfrak{K}$ correspondent (aux périodes près) les deux couples d'arguments u, v et $-u, -v$; il en résulte sans difficulté que l'équation d'une courbe quelconque tracée sur $\mathfrak{K}$ s'obtient

---

(1) *Journal de Math.*, 4e série, t. VII, p. 195-196.

en annulant une fonction intermédiaire paire ou impaire, et réciproquement (*voir*, par exemple, notre Mémoire cité plus haut, p. 48 et 49); en d'autres termes :

L'équation d'une courbe algébrique tracée sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, *s'obtient en égalant à zéro une fonction intermédiaire normale, paire ou impaire, de caractéristique quelconque; et réciproquement.*

Si la fonction intermédiaire est une fonction thêta, c'est-à-dire si son indice k est nul (n° **21**), la courbe est une courbe *ordinaire*, existant sur toute surface de Kummer; si k est différent de zéro, la fonction intermédiaire et la courbe correspondante sont *singulières*, et réciproquement.

D'après cela, les courbes ordinaires sont un cas particulier des courbes singulières; il suffira, dans les formules relatives aux secondes, de supposer $k = 0$ pour les appliquer aux premières.

50. *Degré d'une courbe singulière.* — Soit $F_{l,k}(u, v) = 0$ l'équation d'une telle courbe; son degré est la moitié du nombre des zéros communs à $F_{l,k}(u, v)$ et à une fonction thêta paire, d'ordre deux, et de caractéristique nulle; c'est-à-dire à $F_{l,k}(u, v)$ et à une fonction $F_{2,0}(u, v)$; d'après la formule (25) du n° **34**, le degré est donc

$$\tfrac{1}{2}(2.2l + \beta.2k), \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2l + \beta k,$$

quantité toujours positive (n° **29**).

Si $\beta \equiv 0 \pmod 2$, c'est-à-dire si l'invariant Δ de la relation fondamentale entre les périodes est de la forme $4n$, on voit que le degré des courbes singulières est toujours pair; si $\beta \equiv 1 \pmod 2$, c'est-à-dire si Δ est de la forme $4n + 1$, le degré peut être pair ou impair, selon la parité de k.

51. *Familles de courbes singulières.* — Les fonctions singulières normales, de mêmes indices l, k, de même caractéristique (quelconque d'ailleurs), et qui sont, soit paires, soit impaires, sont des fonctions

linéaires et homogènes d'un certain nombre d'entre elles (n^{os} **40-44**) : les courbes qu'on obtient sur la surface de Kummer en les égalant à zéro, appartiennent donc à une série *linéaire*, nous dirons qu'elles forment une *famille de courbes singulières*.

Une famille est donc déterminée : 1° par les indices l et k; 2° par la caractéristique; 3° par le caractère de fonction paire ou impaire des fonctions normales correspondantes. Par suite, à des indices donnés l, k correspondent, puisqu'il y a seize caractéristiques, *trente-deux* familles de courbes singulières.

Si $k = 0$, les trente-deux familles deviennent des familles de courbes ordinaires, puisque les fonctions normales correspondantes sont des fonctions thêta.

32. Les courbes d'une même famille singulière passent *toutes* par un certain nombre de points doubles de la surface de Kummer, comme on va l'établir. Auparavant il est utile de rappeler quelques définitions et propriétés relatives aux points doubles.

33. *Points doubles de la surface de Kummer.* — Ils sont au nombre de seize, situés six à six dans seize plans dits *singuliers*, qui touchent respectivement $\mathfrak{K}$ suivant une conique. Leurs arguments u, v sont les seize demi-périodes, c'est-à-dire

$$u = \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\lambda g + \tfrac{1}{2}\lambda' h,$$
$$v = \tfrac{1}{2}\varepsilon' + \tfrac{1}{2}\lambda h + \tfrac{1}{2}\lambda' g',$$

où ε, ε', λ, λ' sont égaux à 0 ou 1.

Rappelons d'abord la notation que nous avons proposée [1] pour les seize plans singuliers et les seize points doubles; les plans singuliers sont représentés respectivement par un des seize symboles :

$$11', \quad 12', \quad 13', \quad 14', \quad 21', \quad 22', \quad \ldots, \quad 44',$$

obtenus en combinant un des caractères 1, 2, 3, 4 avec un des carac-

[1] Ce Journal, t. IX, 4e série, p. 58.

tères 1′, 2′, 3′, 4′; les seize points doubles sont représentés par les mêmes symboles (avec parenthèses)

$$(11'),\quad (12'),\quad \ldots,\quad (44').$$

Les six points doubles situés dans le plan $\alpha\alpha'$ sont

$$(\alpha\beta'),\quad (\alpha\gamma'),\quad (\alpha\delta'),\quad (\beta\alpha'),\quad (\gamma\alpha'),\quad (\delta\alpha');$$

de même, les six plans singuliers qui passent par le point $(\alpha\alpha')$ sont

$$\alpha\beta',\quad \alpha\gamma',\quad \alpha\delta',\quad \beta\alpha',\quad \gamma\alpha',\quad \delta\alpha';$$

Quatre points doubles forment un *groupe de Rosenhain*, lorsque le tétraèdre qui les a pour sommets a pour faces quatre plans singuliers : il y a quatre-vingt de ces tétraèdres. Si l'on dispose les caractères 1′, 2′, 3′, 4′ sur une ligne horizontale, dans un ordre quelconque, et les caractères 1, 2, 3, 4 sur une ligne parallèle située au-dessous, dans un ordre également quelconque, et si l'on représente le point $(\alpha\alpha')$ par la droite qui joint les caractères α et α', les *symboles graphiques* des groupes ou tétraèdres de Rosenhain sont

α β′ γ′ δ′ α′ α′ β′ γ′ δ′ α′ β′

α α β γ δ α β α β γ δ

De même, quatre points doubles forment un *groupe de Göpel*, lorsque le tétraèdre qui les a pour sommets n'a pour face aucun plan singulier : il y a soixante tétraèdres de Göpel ayant pour symboles graphiques

$$\vert\,\vert\,\vert\,\vert \qquad \bowtie$$

Le symbole graphique des six points doubles situés dans un même plan singulier est



Indiquons enfin les symboles de groupes remarquables de huit

points, formant ce qu'on peut appeler un *octaèdre de Göpel*, et que nous retrouverons par la suite : ce sont



Il y a trente de ces octaèdres.

54. Quant à la relation entre la notation symbolique et les demi-périodes correspondantes, elle est marquée au Tableau suivant :

	Demi-périodes correspondantes.			
Symboles.	ε.	ε'.	λ.	λ'.
$(11')$	0	0	0	0
$(12')$	0	1	0	0
$(21')$	1	0	0	0
$(22')$	1	1	0	0
$(31')$	0	0	1	0
$(32')$	0	1	1	0
$(41')$	1	0	1	0
$(42')$	1	1	1	0
$(13')$	0	0	0	1
$(14')$	0	1	0	1
$(23')$	1	0	0	1
$(24')$	1	1	0	1
$(33')$	0	0	1	1
$(34')$	0	1	1	1
$(43')$	1	0	1	1
$(44')$	1	1	1	1

La demi-période ε, ε', λ, λ' est

$$u = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2}\lambda g + \frac{1}{2}\lambda' h,$$

$$v = \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{1}{2}\lambda h + \frac{1}{2}\lambda' g.$$

55. Il est intéressant de voir ce que deviennent les symboles ci-dessus, quand on ajoute aux seize demi-périodes une même demi-période, autre que $u = 0$, $v = 0$; voici les résultats, qu'on vérifie immédiatement à l'aide du Tableau précédent.

Ajouter la demi-période $u = \frac{1}{2}$, $v = 0$ revient à permuter 1 et 2, 3 et 4, sans changer 1', 2', 3', 4'; c'est-à-dire que la demi-période, qu'on obtient en ajoutant $\frac{1}{2}$, 0 à (23'), est (13'). Ainsi :

L'addition de la demi-période $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 1$, $\lambda = 0$, $\lambda' = 0$ permute 1 et 2; 3 et 4; ... de même :

»	»	1	0	0	0	»	1', 2'; 3', 4';
»	»	1	1	0	0	»	1, 2; 3, 4; 1', 2'; 3', 4'.
»	»	0	0	1	0	»	1, 3; 2, 4;
»	»	0	1	1	0	»	1, 4; 2, 3;
»	»	1	0	1	0	»	1, 3; 2, 4; 1', 2'; 3', 4'.
»	»	1	1	1.	0	»	1, 4; 2, 3; 1', 2'; 3', 4'.
»	»	0	0	0	1	»	1', 3'; 2', 4';
»	»	0	1	0	1	»	1, 2; 3, 4; 1', 3'; 2'. 4.
»	»	1	0	0	1	»	1', 4'; 2', 3';
»	»	1	1	0	1	»	1, 2; 3, 4; 1', 4'; 2', 3'.
»	»	0	0	1	1	»	1, 3; 2, 4; 1'. 3'; 2', 4'.
»	»	0	1	1	1	»	1, 4; 2. 3; 1, 3'; 2', 4'.
»	»	1	0	1	1	»	1, 3; 2. 4; 1', 4'; 2', 3'.
»	»	1	1	1	1	»	1, 4; 2, 3; 1'. 4'; 2'. 3'.

Zéros remarquables des fonctions normales, paires ou impaires.

56. *Toutes* les fonctions normales paires, de caractéristique donnée, correspondant à des indices l et k donnés, ou *toutes* les fonctions normales impaires correspondantes, s'annulent pour une demi-période quelconque, c'est-à-dire pour

$$(1) \qquad \begin{cases} u = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\lambda g + \frac{1}{2}\lambda' h, \\ v = \frac{1}{2}\varepsilon' + \frac{1}{2}\lambda h + \frac{1}{2}\lambda' g'. \end{cases}$$

On a en effet, d'après les relations mêmes qui définissent une fonction normale $F(u, v)$, d'indices l et k,

$$\begin{aligned} &F(u + \varepsilon + \lambda g + \lambda' h,\ v + \varepsilon' + \lambda h + \lambda g') \\ &\quad = F(u, v)\, e^{\pi i (\varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta')} \times e^{2\pi i \lambda(-lu + kv) + 2\pi i \lambda'[-k\alpha u - (l + k\beta) v]} \\ &\qquad \times e^{\pi i \lambda^2 (-lg + kh) + 2\pi i \lambda\lambda'(-lh + kg')} \times e^{\pi i \lambda'^2[-k\alpha h - (l + k\beta) g']}. \end{aligned}$$

Si l'on fait, dans cette relation,

$$u = -\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\lambda g - \frac{1}{2}\lambda' h, \qquad v = -\frac{1}{2}\varepsilon' - \frac{1}{2}\lambda h - \frac{1}{2}\lambda' g',$$

et si, pour abréger, on désigne par $-\frac{\mathfrak{P}}{2}$ et $-\frac{\mathfrak{P}'}{2}$ ces valeurs de u, v, il vient

$$\mathrm{F}\left(\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}'}{2}\right) = \mathrm{F}\left(-\frac{\mathfrak{P}}{2}, -\frac{\mathfrak{P}'}{2}\right) e^{\pi i[\varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta' + l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') + k(\varepsilon'\lambda + \alpha\varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda')]}.$$

Si donc le nombre

$$(2) \qquad \mathrm{N} = \varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta' + l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') + k(\varepsilon'\lambda + \alpha\varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda')$$

est *pair*, la relation précédente montre que les fonctions $\mathrm{F}(u, v)$ *impaires* s'annulent pour la demi-période $\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}'}{2}$; si ce nombre est *impair*, ce sont les fonctions $\mathrm{F}(u, v)$ *paires* qui s'annulent.

57. Il est aisé de trouver les demi-périodes qui annulent les fonctions $\mathrm{F}(u, v)$ paires ou impaires. Plusieurs cas sont à distinguer :

58. Premier cas : *k est pair.* — Le nombre N (2) est alors de même parité que

$$\varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta' + l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda'):$$

donc, ω, ω', θ, θ' étant donnés, c'est-à-dire la caractéristique étant donnée, les fonctions normales paires (impaires), pour lesquelles l a la même parité, s'annulent pour les mêmes demi-périodes. En particulier, elles s'annulent pour les mêmes demi-périodes que les fonctions thêta normales paires (impaires) dont l'ordre a la parité de l; géométriquement, si k est pair, les courbes des familles singulières passent sur la surface de Kummer par les mêmes groupes de points doubles que les courbes des familles ordinaires. Ainsi [1] :

k étant pair,

---

[1] *Voir* notre Mémoire : *Sur les surfaces hyperelliptiques*, t. IX de ce *Journal*, 4e série, p. 72-74.

Si l est pair, $\delta = l^2 + \beta kl + \alpha k^2$ l'est également :

1° *Les* $\frac{\delta+4}{2}$ *fonctions singulières normales paires, d'indices l, k et de caractéristique nulle, ne s'annulent simultanément par aucune demi-période : il leur correspond une famille,* $\frac{\delta+4}{2} - 1$ *fois infinie, de courbes singulières ne passant par aucun point double de la surface de Kummer;*

2° *Les* $\frac{\delta-4}{2}$ *fonctions singulières normales impaires, de caractéristique nulle, s'annulent pour les seize demi-périodes; il leur correspond une famille,* $\frac{\delta-4}{2} - 1$ *fois infinie, de courbes singulières passant par les seize points doubles;*

3° *Les* $\frac{\delta}{2}$ *fonctions singulières normales paires, de caractéristique donnée non nulle, s'annulent pour huit demi-périodes et les* $\frac{\delta}{2}$ *fonctions normales impaires de même caractéristique s'annulent pour les huit autres; il correspond respectivement à ces deux séries de fonctions deux familles,* $\frac{\delta}{2} - 1$ *fois infinie chacune, de courbes singulières; les courbes de la première famille passent toutes par huit points doubles formant un octaèdre de Göpel, les courbes de la seconde famille passent par les huit autres points doubles qui forment aussi un pareil octaèdre.*

Si l est impair, δ est également impair :

Les δ fonctions singulières normales, de caractéristique donnée quelconque, se divisent en $\frac{\delta+1}{2}$ *fonctions paires et* $\frac{\delta-1}{2}$ *fonctions impaires, ou inversement, selon que la caractéristique est paire ou impaire* (¹) : *aux* $\frac{\delta+1}{2}$ *fonctions correspond une famille,* $\frac{\delta+1}{2} - 1$ *fois infinie, de courbes singulières passant par six points doubles situés dans un même plan singulier de la surface de Kummer; aux*

(¹) La caractéristique est paire ou impaire, selon que $\omega\theta + \omega'\theta'$ est pair ou impair.

$\frac{\delta - 1}{2}$ *fonctions correspond une famille,* $\frac{\delta - 1}{2} - 1$ *fois infinie, de courbes singulières passant par les dix autres points doubles.*

59. Deuxième cas : *k est impair.* — Le nombre N (2) a la parité de

$$\varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta' + l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') + \varepsilon'\lambda + \alpha\varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda'.$$

D'ailleurs $l^2 + \beta l + \alpha \equiv \delta \pmod 2$, et en remplaçant α par sa valeur tirée de cette congruence, on est ramené au nombre

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta' \\ \quad + l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') + \varepsilon'\lambda + \delta\varepsilon\lambda' + l(l + \beta)\varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda'. \end{array} \right.$$

Distinguons maintenant trois sous-cas désignés ci-dessous par I, II, III.

60. 1° δ *est impair.* — D'après le n° **46** les fonctions singulières normales paires et impaires, de caractéristique donnée quelconque, se déduisent (à un facteur exponentiel près) des fonctions singulières normales, paires et impaires ou impaires et paires, par l'addition à u, v d'une demi-période.

Il suffit donc d'étudier les demi-périodes qui annulent les fonctions paires et impaires de caractéristique nulle.

Le nombre (3) est alors, en y faisant $\omega = \omega' = \theta = \theta' = 0$ et $\delta = 1$,

$$l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') + \varepsilon'\lambda + \varepsilon\lambda' + l(l + \beta)\varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda'.$$

ce qui s'écrit

$$[\varepsilon' + \varepsilon l][\lambda + \lambda'(l + \beta)] + \varepsilon\lambda'.$$

S'il est $\equiv 1$, les fonctions paires de caractéristique nulle s'annulent pour la demi-période $(\varepsilon, \varepsilon', \lambda, \lambda')$, sinon ce sont les fonctions impaires. Or l'équation

$$xy + zt \equiv \Lambda \pmod 2,$$

où x, y, z, t sont 0 ou 1, a *six* solutions si $\Lambda \equiv 1$, et *dix* si $\Lambda \equiv 0$;

pour $A = 1$, ces solutions sont

$$\begin{aligned}
x &= 0, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1,\\
y &= 0, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 1,\\
z &= 1, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 1,\\
t &= 1, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad 0.
\end{aligned}$$

Les fonctions paires, de caractéristique nulle, d'indices l et k, s'annulent donc pour les six demi-périodes

$$\left.\begin{array}{llllll}
\varepsilon \equiv 1, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0,\\
\varepsilon' \equiv l, & l, & l+1, & 1, & 1, & l+1,\\
\lambda \equiv l+\beta, & l+\beta+1, & l+\beta, & 1, & l+\beta+1, & 1,\\
\lambda' \equiv 1, & 1, & 1, & 0, & 1, & 0.
\end{array}\right\} \pmod 2.$$

Les notations symboliques de ces six demi-périodes sont les suivantes, suivant la parité de β et de l :

β *pair*	*l pair* ...	(23′),	(43′),	(24′),	(32′),	(34′),	(42′)
	l impair.	(44′),	(24′),	(43′),	(32′),	(14′),	(41′)
β *impair*	*l pair* ...	(43′),	(23′),	(44′),	(32′),	(14′),	(42′)
	l impair.	(24′),	(44′),	(23′),	(32′),	(34′),	(41′)

On a ainsi trois types de groupes de six points doubles de $\mathfrak{K}$ (les deux derniers revenant évidemment au même) qu'on peut caractériser aisément au point de vue géométrique.

Le premier type : (23′), (43′), (24′), (32′), (34′), (42′) est formé par les six sommets non communs à deux tétraèdres de Göpel qui ont un sommet commun (22′).

Le deuxième type : (44'), (24'), (43'), (32'), (14'), (41') est formé par les six sommets non communs à deux tétraèdres de Rosenhain qui ont un sommet commun (42').

Le troisième type : (43'), (23'), (44'), (32'), (14'), (42') est formé par les six sommets non communs à un tétraèdre de Göpel et à un tétraèdre de Rosenhain qui ont un sommet commun (41').

Les fonctions impaires, de caractéristique nulle, d'indices l et k s'annulent pour les *dix* demi-périodes qui n'annulent pas les fonctions paires.

On passe enfin du cas de la caractéristique nulle à celui des caractéristiques non nulles en ajoutant une même demi-période à chacun des groupes ci-dessus ; les notations symboliques des groupes nouveaux se déduisent des précédentes par les règles du n° **55**, et l'on reconnaît que les systèmes de six points doubles correspondants possèdent encore les mêmes propriétés géométriques. En résumé :

61. I. *k étant impair, si δ est impair :*

Les δ fonctions singulières normales, d'indices l et k, de caractéristique donnée quelconque, se divisent en $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions impaires, ou inversement (¹) : *aux $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions correspond une famille, $\frac{\delta+1}{2}-1$ fois infinie, de courbes singulières passant toutes par six points doubles, non situés dans un même plan singulier, de la surface de Kummer; aux $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions correspond une famille, $\frac{\delta-1}{2}-1$ fois infinie, de courbes singulières passant par les dix autres points doubles.*

Comme il y a seize caractéristiques, on trouve ainsi, pour l et k donnés (k impair), *seize groupes* remarquables de six points doubles, qui ne dépendent que de la parité de l et de β et qui se déduisent de l'un d'eux par l'addition d'une des quinze demi-périodes autres que (0, 0) : on vérifie sans difficulté que deux quelconques de ces groupes ont

(¹) Selon que $\omega[(l+\beta)\theta+\theta']+\omega'[-\alpha\theta+l\theta']$ est pair ou impair (n° 45).

toujours deux points communs et deux seulement; les huit points non communs forment un octaèdre de Göpel; enfin un même point singulier appartient à six groupes.

62. 2° δ *est pair, et la caractéristique est telle que*

$$\omega \equiv l\omega'; \; \theta' \equiv \theta(l+\beta) \pmod 2.$$

Comme d'après le n° **47** on passe au cas de la caractéristique non nulle en ajoutant une demi-période convenable aux fonctions normales, paires et impaires, de caractéristique nulle, nous supposerons encore

$$\omega = \omega' = \theta = \theta' = 0.$$

Le nombre (3) est alors, en faisant $\delta \equiv 0$, de la parité de

$$l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') + \varepsilon'\lambda + l(l+\beta)\varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda',$$

ce qui s'écrit

$$[\varepsilon' + \varepsilon l][\lambda + \lambda'(l+\beta)].$$

On a donc à étudier une congruence de la forme

$$xy \equiv A \qquad \pmod 2.$$

Si $A \equiv 1$, on a nécessairement $x = 1$, $y = 1$, d'où

$$\varepsilon' + \varepsilon l \equiv 1, \qquad \lambda + \lambda'(l+\beta) \equiv 1 \qquad \pmod 2,$$

ce qui donne pour zéros des fonctions *paires*, de caractéristique nulle, d'indices l, k, les *quatre* demi-périodes

$$\begin{array}{lllll}
\varepsilon \equiv 0, & 0, & 1, & 1, \\
\varepsilon' \equiv 1, & 1, & l+1, & l+1, \\
\lambda \equiv 1, & l+\beta+1, & 1, & l+\beta+1, \\
\lambda' \equiv 0, & 1, & 0, & 1.
\end{array}$$

Les notations symboliques correspondantes sont, suivant la parité de β et de l :

β pair	*l pair*	(32′), (34′), (42′), (44′)
	l impair	(32′), (14′), (41′), (23′)
β impair	*l pair*	(32′), (14′), (42′), (24′)
	l impair	(32′), (34′), (41′), (43′)

Si β est pair, les quatre points forment donc un *groupe de Göpel;* si β est impair, *un groupe de Rosenhain*.

Les fonctions impaires, de caractéristique nulle, s'annulent pour les *douze* demi-périodes qui n'annulent pas les fonctions paires.

Pour passer au cas des trois caractéristiques remarquables non nulles telles que $\omega \equiv l\omega'$, $\theta' \equiv \theta(l+\beta)$, il suffit d'ajouter une demi-période aux groupes de quatre points ci-dessus; on retrouve soit le même groupe (pour quatre demi-périodes y compris o, o), soit trois autres groupes, dont chacun correspond à une des trois caractéristiques. Le Tableau suivant fait connaître ces groupes de quatre points, selon la parité de β et de l: on y a récrit le groupe qui répond à la caractéristique nulle.

β *pair.*

l pair.	*l impair.*
(32′), (34′), (42′), (44′),	(32′), (14′), (41′), (23′),
(31′), (33′), (41′), (43′),	(42′), (24′), (31′), (13′),
(12′), (14′), (22′), (24′),	(12′), (34′), (21′), (43′),
(11′), (13′), (21′), (23′),	(22′), (44′), (11′), (33′),

β impair.

l pair.				*l impair.*			
(32'),	(14'),	(42'),	(24'),	(32'),	(34'),	(41'),	(43'),
(31'),	(13'),	(41'),	(23'),	(31'),	(33'),	(42'),	(44'),
(12'),	(34'),	(22'),	(44'),	(12'),	(14'),	(21'),	(23'),
(11'),	(33'),	(21'),	(43').	(22'),	(24'),	(11'),	(13').

Ce Tableau montre que, dans chaque cas, les quatre groupes de quatre points comprennent une (et une seule) fois chacun des seize points doubles; deux quelconques d'entre eux forment un octaèdre de Göpel; si β est pair, chaque groupe est un groupe de Göpel; si β est impair, un groupe de Rosenhain. En résumé :

63. 2°. *k étant impair, si δ est pair :*

Les δ fonctions singulières normales, d'indices l et k, appartenant à l'une des quatre caractéristiques remarquables $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ *telles que $\omega \equiv l\omega'$, $\theta \equiv \theta(l+\beta)$ (mod 2), se divisent en $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions impaires, ou inversement, selon que $\theta\omega'$ est pair ou impair : aux $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions correspond une famille, $\frac{\delta-2}{2}-1$ fois infinie, de courbes singulières passant toutes par quatre points doubles de la surface de Kummer; aux $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions correspond une famille, $\frac{\delta-2}{2}-1$ fois infinie, de courbes singulières passant par les douze autres points doubles.*

Aux quatre caractéristiques correspondent ainsi quatre groupes de quatre points doubles, dont l'ensemble forme les seize points doubles de la surface.

64. 3° *δ est pair et la caractéristique ne vérifie pas*

$$\omega \equiv l\omega', \qquad \theta' \equiv \theta(l+\beta) \qquad (\text{mod } 2).$$

En ce cas, il y a $\frac{\delta}{2}$ fonctions paires d'indices l, k et autant d'impaires: la caractéristique ne peut être nulle. Le nombre (3) s'écrit, en y faisant $\delta = 0$,

$$\varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta' + l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') + \varepsilon'\lambda + l(l+\beta)\varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda',$$

ce qui s'écrit

$$[\varepsilon' + \varepsilon l + \theta][\lambda + \lambda'(l+\beta) + \omega'] + [\varepsilon + \theta' + \theta(l+\beta)][\omega + l\omega']$$
$$+ \lambda'[\theta' + \theta(l+\beta)] + \omega[\theta' + \theta(l+\beta)] + \omega'[\theta' l + \theta l(l+\beta) + \theta].$$

Pour trouver les demi-périodes qui annulent les fonctions paires, il faut exprimer que ce nombre $\equiv 1 \pmod 2$; ce qui, en représentant par Ω les termes de la seconde ligne, formés de quantités connues, donne une congruence de la forme

$$xy + z(\omega + l\omega') + t[\theta' + \theta(l+\beta)] \equiv \Omega + 1 \pmod 2.$$

Or, par hypothèse, $\omega + l\omega'$ et $\theta' + \theta(l+\beta)$ ne sont pas pairs à la fois, de sorte que, si $\omega + l\omega' \equiv 1$ par exemple, on peut donner à x, y, t les valeurs 0 ou 1 et en déduire toujours une valeur de z. On a donc en tout *huit* solutions en x, y, z, t; à une de ces solutions x, y, z, t correspond la solution en ε, ε', λ, λ' :

$$(4)\qquad \begin{cases} \varepsilon' + \varepsilon l + \theta \equiv x, & \varepsilon + \theta' + \theta(l+\beta) \equiv z, \\ \lambda + \lambda'(l+\beta) + \omega \equiv y, & \lambda' \equiv t, \end{cases}$$

ce qui donne un et un seul système ε, ε', λ, λ'. Donc les fonctions normales paires s'annulent pour *huit* demi-périodes, et les fonctions impaires pour les *huit* autres : les groupes de points doubles correspondants ne dépendent, d'après (4), que de la parité de l et de β.

Comme les caractéristiques qui ne vérifient pas $\omega \equiv l\omega'$, $\theta' \equiv \theta(l+\beta)$ sont au nombre de $16 - 4 = 12$, on trouve ainsi, pour l et β de parités données, $2 \times 12 = 24$ groupes de huit points doubles; ces groupes sont *associés* deux à deux de telle sorte que les huit points doubles qui ne font pas partie d'un groupe appartiennent à l'autre. Il suffira

donc d'écrire douze des vingt-quatre groupes; les douze autres s'en déduisent immédiatement. Voici les résultats :

β *pair.*

l pair.

(44') (24') (43') (32') (12') (13') (21') (31')
(44') (24') (43') (41') (11') (13') (22') (42')
(44') (24') (32') (41') (11') (12') (23') (33')
(44') (43') (32') (14') (22') (23') (11') (31')
(44') (43') (14') (41') (21') (23') (12') (42')
(44') (32') (14') (41') (21') (22') (13') (33')
(24') (43') (32') (41') (21') (22') (23') (34')
(44') (24') (43') (14') (33') (34') (11') (21')
(44') (24') (14') (41') (31') (34') (13') (23')
(24') (32') (14') (41') (42') (11') (21') (31')
(24') (43') (32') (14') (42') (13') (23') (33')
(43') (32') (14') (41') (11') (12') (13') (34')

et les douze groupes associés.

l impair.

(23') (43') (24') (34') (11') (13') (14') (22')
(24') (32') (34') (42') (11') (12') (14') (33')
(23') (43') (32') (42') (11') (12') (13') (44')
(43') (32') (34') (42') (22') (11') (31') (41')
(23') (32') (34') (42') (21') (22') (13') (33')
(43') (24') (32') (42') (21') (22') (14') (44')
(23') (43') (24') (42') (33') (11') (21') (41')
(23') (43') (24') (32') (31') (33') (12') (22')
(23') (43') (34') (42') (31') (33') (14') (44')
(23') (24') (32') (34') (44') (11') (21') (31')
(23') (24') (34') (42') (41') (44') (12') (22')
(43') (24') (32') (34') (41') (44') (13') (33')

et les douze groupes associés.

β *impair.*

l pair.

(32') (34') (43') (12') (13') (14') (21') (31')
(34') (41') (43') (11') (13') (14') (22') (42')
(32') (34') (41') (11') (12') (14') (23') (33')
(32') (41') (43') (11') (12') (13') (24') (44')
(34') (41') (43') (21') (23') (24') (12') (42')
(31') (34') (41') (21') (22') (24') (13') (33')
(32') (34') (43') (22') (23') (24') (11') (31')
(32') (41') (43') (21') (22') (23') (14') (44')
(32') (41') (43') (31') (33') (12') (22') (42')
(34') (41') (43') (31') (33') (14') (24') (44')
(32') (34') (41') (42') (44') (11') (21') (31')
(32') (34') (43') (42') (44') (13') (23') (33')

et les douze groupes associés.

l impair.

(32') (42') (24') (12') (13') (21') (31') (41')
(32') (42') (24') (11') (12') (23') (33') (43')
(32') (14') (42') (11') (12') (13') (34') (44')
(32') (14') (42') (21') (22') (13') (33') (43')
(32') (14') (42') (22') (23') (11') (31') (41')
(32') (42') (24') (21') (22') (23') (34') (44')
(14') (42') (24') (33') (34') (11') (21') (41')
(32') (14') (24') (31') (33') (34') (12') (22')
(14') (42') (24') (31') (34') (13') (23') (43')
(32') (14') (24') (44') (11') (21') (31') (43')
(42') (14') (24') (41') (43') (44') (12') (22')
(32') (14') (24') (41') (44') (13') (23') (33')

et les douze groupes associés.

On peut faire sur ces Tableaux les remarques suivantes :

1° β *pair*. — Il y a *huit* plans singuliers qui contiennent respectivement *quatre* points d'un groupe; par exemple, pour le groupe

$$(44') \quad (24') \quad (43') \quad (32') \quad (12') \quad (13') \quad (21') \quad (31'),$$

ces huit plans sont

$$42', \quad 22', \quad 41', \quad 23', \quad 11', \quad 14', \quad 33' \quad 34'.$$

Considérons un de ces plans : il contient, outre quatre points du groupe, deux autres points doubles; ces deux points et les quatre points du groupe non situés dans le plan forment un des groupes de six points rencontrés aux n^os^ **60-61**; si l est pair, ce groupe de six points est un de ceux qui correspondent à l impair, et inversement.

Chacun des groupes de huit points comprend deux points de l'un quelconque des quatre groupes de quatre points rencontrés au n° **62**, et qui correspondent à la même parité de l.

2° β *impair*. — Il y a *deux* plans singuliers qui contiennent respectivement *cinq* points d'un groupe; par exemple, pour le groupe

$$(32') \quad (34') \quad (43') \quad (12') \quad (13') \quad (14') \quad (21') \quad (31'),$$

ces deux plans sont

$$11' \quad \text{et} \quad 33'.$$

Un de ces plans contient en outre un sixième point double; ce point et les trois points du groupe non situés dans le plan forment un des groupes de quatre points (Rosenhain) rencontrés au n° **62** : si l est pair, c'est un des groupes de quatre points qui correspondent à l impair, et inversement.

En résumé :

65. III. *k étant impair, si δ est pair :*

Les δ fonctions singulières normales, d'indices l, k, appartenant à l'une des douze caractéristiques qui ne vérifient pas les congruences $\omega \equiv l\omega'$, $\theta' \equiv \theta(l-\beta)$ (mod 2), se divisent en $\frac{\delta}{2}$ fonctions

paires et $\frac{\delta}{2}$ fonctions impaires; à ces deux groupes de fonctions correspondent deux familles, $\frac{\delta}{2}-1$ fois infinie chacune, de courbes singulières; les courbes d'une famille passent toutes par huit points doubles de la surface de Kummer, et les courbes de l'autre famille par les huit autres points doubles.

66. *Remarque I.* — D'une manière générale, tous les groupes de points doubles rencontrés aux nos **58-65** ne dépendent, pour une caractéristique donnée, que de la parité de β, de l et de k.

67. *Remarque II.* — *Si k est impair*, les groupes de points doubles situés sur les courbes singulières d'une même famille possèdent la propriété suivante : un plan singulier quelconque contient toujours un nombre pair de ces points lorsque β est pair, et un nombre impair lorsque β est impair. Cela résulte, soit des Tableaux donnés ci-dessus, soit de ce qu'une courbe (singulière ou non) tracée sur la surface de Kummer touche les seize plans singuliers en tous les points, autres que les points doubles, où elle les rencontre; par suite, dans chaque plan singulier, elle passe par un nombre pair ou impair de points doubles, selon que son degré $(2l+\beta k)$ est pair ou impair.

68. *Remarque III.* — Il résulte des propositions ci-dessus que, *dans tous les cas :*

Une famille de courbes singulières, d'indices l, k, qui passent toutes par $2s$ points doubles de la surface de Kummer, est

$$\tfrac{1}{2}(\delta-s+2)$$

fois infinie.

On pose toujours

$$\delta=l^2+\beta kl+\alpha k^2.$$

C'est également vrai, bien entendu, pour les familles de courbes ordinaires, qui répondent au cas particulier de $k=0$.

Genre des courbes singulières sur la surface de Kummer.

69. Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes non homogènes d'un point de la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, on a

$$(5) \qquad x = \frac{\Theta_1(u, v)}{\Theta_0(u, v)}, \qquad y = \frac{\Theta_2}{\Theta_0}, \qquad z = \frac{\Theta_3}{\Theta_0},$$

les Θ étant des fonctions thêta du second ordre, paires et de caractéristique nulle.

Désignons par $F_0(u, v)$ une fonction normale quelconque, d'indices l, k, paire ou impaire, et de caractéristique donnée; par la courbe $F_0 = 0$, tracée sur $\mathfrak{K}$, menons une surface d'ordre quelconque n, $S(x, y, z) = 0$, qui coupe en outre $\mathfrak{K}$ suivant une courbe $C(u, v) = 0$; on a, en désignant par $S(u, v)$ ce que devient $S(x, y, z)$, quand on y remplace x, y et z par leurs valeurs (5) en u et v :

$$(6) \qquad S(u, v) = F_0(u, v)\frac{C(u, v)}{\Theta_0^n(u, v)}.$$

Par la courbe $C(u, v) = 0$ menons une surface quelconque d'ordre n, $\varphi(x, y, z) = 0$, on a de même

$$(7) \qquad \varphi(u, v) = F(u, v)\frac{C(u, v)}{\Theta_0^n(u, v)},$$

$F(u, v)$ étant une fonction normale de mêmes indices et de même caractéristique que F_0, paire ou impaire en même temps que F_0; car, d'après (6) et (7), $\frac{F}{F_0}$ est une fonction quadruplement périodique paire.

Cela posé, d'après un théorème bien connu de M. Nöther, toute différentielle abélienne de première espèce appartenant à la courbe $F_0(u, v) = 0$ est *nécessairement* de la forme

$$(8) \qquad \frac{\varphi(x, y, z)}{S'_y K'_z - S'_z K'_y}\,dx,$$

en désignant par $K(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface $\mathfrak{K}$.

Réciproquement, une différentielle de ce type n'est pas toujours de première espèce si la courbe F_0 présente des singularités; mais nous n'aurons besoin que de la première partie du théorème.

70. Remplaçons maintenant, dans la différentielle (8), x, y et z par leurs valeurs en u, v, et tenons compte de ce que, sur la courbe considérée, $F_0(u, v)$ est nul.

On a, d'après (6),

$$S'_u = \frac{\partial F_0}{\partial u}\frac{C}{\Theta''_0} = S'_x\frac{\partial x}{\partial u} + S'_y\frac{\partial y}{\partial u} + S'_z\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial v}\frac{C}{\Theta''_0} = S'_x\frac{\partial x}{\partial v} + S'_y\frac{\partial y}{\partial v} + S'_z\frac{\partial z}{\partial v},$$

De même, $K(u, v)$ étant nul identiquement,

$$0 = K'_x\frac{\partial x}{\partial u} + K'_y\frac{\partial y}{\partial u} + K'_z\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$0 = K'_x\frac{\partial x}{\partial v} + K'_y\frac{\partial y}{\partial v} + K'_z\frac{\partial z}{\partial v},$$

d'où, en éliminant $\frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial v}$,

$$\frac{\partial x}{\partial u}(S'_x K'_z - S'_z K'_x) + \frac{\partial y}{\partial u}(S'_y K'_z - S'_z K'_y) = \frac{\partial F_0}{\partial u}\frac{C}{\Theta''_0}K'_z,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}(S'_x K'_z - S'_z K'_x) + \frac{\partial y}{\partial v}(S'_y K'_z - S'_z K'_y) = \frac{\partial F_0}{\partial v}\frac{C}{\Theta''_0}K'_z,$$

et, par suite,

$$(9)\qquad (S'_y K'_z - S'_z K'_y)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \frac{C}{\Theta''_0}\left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial F_0}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)K'_z.$$

D'ailleurs

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv,$$

$$0 = \frac{\partial F_0}{\partial u}\,du + \frac{\partial F_0}{\partial v}\,dv,$$

ce qui donne

$$dx = \left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial F_0}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{du}{\left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\right)}.$$

Portant cette valeur de dx, la valeur (7) de φ et la valeur (9) de $S'_y K'_z - S'_z K'_y$ dans la différentielle (8), celle-ci devient

(10) $$\frac{F(u, v)}{\left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\right)} \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}{K'_z} du.$$

Observons enfin que, sur la surface $\mathfrak{K}$, l'intégrale double

$$\iint \frac{dx\,dy}{K'_z}$$

est de première espèce et se réduit à $\iint du\,dv$ si l'on remplace x et y par leurs valeurs (5) en u et v; on a ainsi

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = K'_z$$

(car on peut supposer le facteur constant égal à l'unité). La différentielle (10) s'écrit alors

(11) $$F(u, v)\frac{du}{\left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\right)}.$$

Telle est la forme *nécessaire* des différentielles abéliennes de première espèce appartenant à la courbe $F_0 = 0$; $F(u, v)$ y désigne une fonction de la même famille que $F_0(u, v)$.

71. *Réciproquement*, il est clair que toute différentielle de la forme (11) est une intégrale abélienne appartenant à la courbe $F_0(u, v) = 0$; on le voit, par exemple, en refaisant en sens inverse les calculs précédents.

Pour qu'elle soit de première espèce, il faut et il suffit, si la courbe

$F_0 = 0$ possède un point double, c'est-à-dire un point vérifiant les relations

$$F_0 = 0, \qquad \frac{\partial F_0}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial F_0}{\partial v} = 0,$$

que la courbe $F = 0$ passe par ce point; en général, si la courbe $F_0 = 0$ a, en un point, une singularité σ, il faut et il suffit que la courbe $F = 0$ possède en ce point la singularité σ', *adjointe de* σ. Ainsi :

Les différentielles abéliennes de première espèce appartenant à une courbe $F_0(u, v) = 0$ *sont de la forme* (11), *où* $F(u, v)$ *est le premier membre de l'équation d'une courbe de la même famille que la proposée et adjointe à celle-ci.*

72. Les courbes d'une même famille passent *toutes* (n^os **58-65**) par $2s$ points doubles de la surface de Kummer, s pouvant être nul. Nous allons montrer :

1° Qu'elles n'ont pas d'autre point commun, simple ou multiple;

2° Qu'aucun des $2s$ points doubles de $\mathfrak{K}$ par lesquels elles passent n'est multiple sur elles toutes.

Soit, en effet, $F_0(u, v) = 0$ une quelconque des courbes de la famille, ne présentant aucune singularité spéciale par rapport aux autres : les courbes de la famille formant une série *linéaire* tracée sur une surface $\mathfrak{K}$, sans lignes multiples, n'ont pas *toutes* des points singuliers variables d'une courbe à l'autre; si donc la courbe $F_0 = 0$ a des singularités, celles-ci sont fixes et communes, dès lors, à toutes les courbes de la famille. Soit alors $F = 0$ une autre de ces courbes; la différentielle abélienne

$$F(u, v) \frac{du}{\left(\dfrac{\partial F_0}{\partial v}\right)}$$

est de première espèce sur $F_0 = 0$, puisqu'en tout point singulier de $F_0 = 0$, s'il en existe, la courbe $F = 0$ présente la même singularité. Le *genre*, p, de $F_0 = 0$ est donc égal au nombre des fonctions $F(u, v)$ linéairement distinctes, diminué d'une unité (car on doit exclure la

fonction F_0); on a ainsi, en vertu du nº **68**,

$$(12) \qquad p = \frac{1}{2}(\delta - s + 2) \qquad (\delta = l^2 + \beta kl + \alpha k^2).$$

D'ailleurs, d'après un théorème classique, la courbe $F_0 = 0$ est coupée par les courbes F, qui sont ses adjointes les plus générales, en $2(p-1)$ points mobiles, c'est-à-dire que les deux équations

$$F_0(u, v) = 0, \qquad F(u, v) = 0$$

ont $2.2(p-1)$ solutions *non fixes,* deux à deux égales et de signes contraires. Le nombre *total* des solutions communes étant (nº **54**) égal à 2δ, on a, pour le nombre des solutions *fixes,*

$$2\delta - 4(p-1),$$

c'est-à-dire $2s$, d'après (12).

Il en résulte que les courbes $F_0 = 0$, $F = 0$ n'ont pas d'autres points communs fixes que les $2s$ points doubles de $\mathfrak{K}$, par lesquels passent toutes les courbes de la famille, et que les $2s$ points sont *simples* sur ces courbes.

73. Nous allons maintenant étudier les singularités que peuvent présenter les courbes d'une même famille en un des points doubles de la surface de Kummer $\mathfrak{K}$.

74. Soit O le point double de $\mathfrak{K}$ qui répond à $u = 0$, $v = 0$; on verra, sans difficulté, que les raisonnements ci-après s'appliquent à tout autre point double.

Si les courbes d'une même famille passent *toutes* par O, comme O est simple (nº **72**) sur la courbe générale de la famille, l'équation de celle-ci s'obtient en annulant une fonction *impaire*, $F(u, v)$, de u et v : par suite, les courbes de la famille qui admettent O comme point multiple, l'admettent comme point multiple d'*ordre impair*, $2q+1$.

Pour exprimer que O est un point multiple d'ordre $2q+1$ pour une courbe de la famille, il faut écrire que, dans le développement de Maclaurin de la fonction impaire $F(u, v)$, les termes d'ordres

1, 3, 5, ..., $(2q-1)$ en u et v disparaissent, ce qui donne

$$2+4+6+\ldots+2q \qquad \text{ou} \qquad q(q+1)$$

conditions *au plus*. Nous disons *au plus,* parce qu'il pourrait arriver que ces conditions fussent réductibles entre elles.

De même, si O n'est pas un des $2s$ points communs à toutes les courbes de la famille, l'équation de la courbe la plus générale de cette famille s'obtient en annulant une fonction *paire,* $F(u, v)$, de u et v; les courbes de la famille qui admettent O comme point multiple, l'admettent donc comme point multiple d'*ordre pair,* $2r$. Le nombre des conditions exprimant que O est multiple d'ordre $2r$ est

$$1+3+5+\ldots+2r-1$$

ou r^2 *au plus.*

75. *Expression générale du genre d'une courbe.* — Supposons qu'une courbe *indécomposable*, appartenant à une famille d'indices l, k, ait, en un point double, O, de $\mathfrak{K}$, un point multiple d'ordre $2r$, à branches distinctes : quel abaissement de genre produit une pareille singularité?

Soit $F_0(u, v)=0$ la courbe considérée; les différentielles abéliennes de première espèce qui lui appartiennent sont du type

$$F(u, v)\frac{du}{\left(\dfrac{\partial F_0}{\partial v}\right)},$$

où $F(u, v)$ est le premier membre de l'équation d'une courbe de la même famille que $F_0=0$ et *adjointe* à celle-ci, c'est-à-dire devant présenter en O un point multiple d'ordre $2r-1$ *au moins.* Mais, en vertu du numéro précédent, les ordres de multiplicité du point O sur les diverses courbes d'une même famille sont de même parité : la courbe $F_0(u, v)=0$ admet donc nécessairement O comme point multiple d'ordre $2r$, c'est-à-dire qu'elle est assujettie à r^2 conditions *au plus.* La diminution de genre est donc r^2 *au plus.*

De même, si la courbe $F_0(u, v)=0$ a, en un point double de $\mathfrak{K}$, un point multiple d'ordre $2q+1$, à branches distinctes, la diminution correspondante du genre est $q(q+1)$ *au plus.*

Enfin, il est clair qu'un point double, non situé en un des seize points singuliers de $\mathfrak{K}$, diminue le genre d'une unité; et, en général, un point multiple à branches distinctes d'ordre h, le diminue de $\frac{1}{2}h(h-1)$, *au plus*.

Soit alors une courbe $F_0(u, v) = 0$, appartenant à une famille d'indices l, k, dont toutes les courbes passent par $2s$ points doubles de $\mathfrak{K}$. Supposons que F_0 présente les singularités suivantes :

1° En chacun de ces $2s$ points, des points multiples *à branches distinctes* d'ordres respectifs

$$2q_1+1, \quad 2q_2+1, \quad \ldots, \quad 2q_{2s}+1;$$

2° En chacun des $16-2s$ autres points doubles de $\mathfrak{K}$, des points multiples *à branches distinctes* d'ordres respectifs

$$2r_1, \quad 2r_2, \quad \ldots, \quad 2r_{16-2s};$$

3° En d'autres points, des points multiples *à branches distinctes* d'ordres

$$h_1, \quad h_2, \quad \ldots.$$

Un ou plusieurs des nombres q_i, r_i, h_i peuvent être nuls, c'est-à-dire que la courbe considérée n'a aucune singularité au point correspondant.

Le genre des courbes de la même famille que F_0 est (n° **72**)

$$\frac{1}{2}(\delta - s + 2);$$

si p est le genre de F_0, on a donc, en vertu des résultats relatifs à l'abaissement du genre,

$$(13) \qquad p \geqq \frac{1}{2}(\delta - s + 2) - \Sigma q(q+1) - \Sigma r^2 - \frac{1}{2}\Sigma h(h-1).$$

Soit d'ailleurs $F(u, v) = 0$ une quelconque des courbes de la même famille que la courbe F_0, et adjointe à celle-ci; les deux équations

$$F_0(u, v) = 0, \qquad F(u, v) = 0,$$

qui ont en tout 2δ solutions communes, en ont $4(p-1)$ non fixes (n° **72**); comme la courbe $F(u,v)=0$ présente les mêmes singularités que la courbe $F_0=0$ aux seize points doubles de $\mathfrak{K}$ (n° **75**), et un point d'ordre $h-1$, au moins, en chaque autre point multiple d'ordre h de F_0, on a

$$(14)\quad 4(p-1)=2\delta-4\Sigma r^2-\Sigma(2q+1)^2-\Sigma h(h-1)-N,$$

le terme N étant mis pour tenir compte des autres points fixes d'intersection de F_0 avec les courbes F, s'il y en a. On en déduit, en observant que $\Sigma(2q+1)^2=4\Sigma q(q+1)+2s$,

$$(15)\quad p \leqq \tfrac{1}{2}(\delta-s+2)-\Sigma r^2-\Sigma q(q+1)-\tfrac{1}{2}\Sigma h(h-1)$$

et, par suite, en comparant avec (13), on voit qu'il faut prendre le signe $=$, ce qui donne la formule

$$(16)\quad p=\tfrac{1}{2}(l^2+\beta kl+\alpha k^2-s+2)-\Sigma r^2-\Sigma q(q+1)-\tfrac{1}{2}\Sigma h(h-1).$$

76. *Remarque I.* — La seconde partie de la démonstration précédente ne s'applique pas si la courbe F_0 est unicursale, c'est-à-dire si $p=0$, parce qu'il n'existe alors pas de courbe $F(u,v)$: la formule (14) peut donc n'être plus vérifiée.

Il est aisé d'en donner une démonstration valable.

Soit $\Phi(u,v)$ une fonction normale de même caractéristique que la fonction $F_0(u,v)$, paire ou impaire en même temps que celle-ci, d'indices $l+2m$, k; m étant un entier >0 quelconque. Les courbes $\Phi(u,v)=0$ passent par les $2s$ points doubles de $\mathfrak{K}$ communs à toutes les courbes de la famille qui comprend F_0 (n° **66**).

Parmi ces courbes Φ, considérons celles, $\varphi(u,v)=0$, qui sont adjointes à F_0; elles présentent aux points singuliers de F_0 les singularités que présentaient tout à l'heure les courbes adjointes F : on démontre sans difficulté qu'elles coupent F_0 en $2(p-1)+m(2l+\beta k)$ points mobiles (¹); de sorte que, en raisonnant comme plus haut et en

(¹) *Voir* une démonstration analogue dans notre Mémoire : *Sur les surfaces hyperelliptiques,* t. IX de ce *Journal*, 4ᵉ série, p. 152.

employant la formule (25) du n° **34**, on a

$$4(p-1)+2m(2l+\beta k)=2l(l+2m)+\beta k(2l+2m)+2\alpha k^2 \\ -4\Sigma r^2-\Sigma(2q+1)^2-\Sigma h(h-1)-N,$$

ce qui, les termes en m disparaissant, donne à nouveau la formule (14). Or les courbes Φ dépendent linéairement de

$$\frac{1}{2}[(l+2m)^2+\beta k(l+2m)+\alpha k^2-s+2]$$

paramètres (n° **68**), et l'on peut toujours prendre m assez grand pour qu'il y ait une au moins de ces courbes adjointe à F_0. La formule (16) est donc générale.

77. *Remarque II.* — Nous avons supposé, en établissant la formule (16) du genre, que les points multiples de la courbe $F_0=0$ étaient à branches séparées; s'il en est autrement, cette circonstance ne peut évidemment que *diminuer* le genre, de sorte qu'on a, en ce cas,

$$(17) \qquad p \leqq \frac{1}{2}(\delta-s+2)-\Sigma r^2-\Sigma q(q+1)-\frac{1}{2}\Sigma h(h-1).$$

78. Des raisonnements précédents résulte aussi, sans difficulté, la proposition suivante :

Considérons, parmi les courbes d'une famille donnée, d'indices l, k, passant simplement par $2s$ points doubles de $\mathfrak{K}$, celles, C, qui admettent un ou plusieurs de ces points pour points multiples d'ordres donnés, à savoir :

Chacun des $2s$ points pour points d'ordres respectifs $2q_i+1$;

Chacun des $16-2s$ autres points doubles pour points d'ordres respectifs $2r_i$;

et supposons que ces courbes ne soient pas toutes *décomposables*.

Les courbes C forment évidemment une série linéaire; elles dépendent d'un nombre de paramètres p qui est égal à leur genre, et qui a pour expression

$$(18) \qquad p=\frac{1}{2}(l^2+\beta kl+\alpha k^2-s+2)-\Sigma r^2-\Sigma q(q+1).$$

Elles n'ont en commun aucun autre point, simple ou double de $\mathfrak{K}$, que ceux qui interviennent dans leur définition; elles n'ont pas non plus, puisqu'elles forment une série linéaire, de point multiple variable d'une courbe à l'autre.

Cas elliptique.

79. Nous avons jusqu'ici laissé expressément de côté (nº **24**), dans le cas elliptique, les courbes qui correspondent à des indices l, k tels que δ, c'est-à-dire $l^2+\beta kl+\alpha k^2$ soit nul : d'après le nº **25**, ces courbes s'obtiennent en annulant une fonction thêta elliptique d'une seule variable, U ou V, de sorte qu'elles forment deux familles, évidemment linéaires, $U=$ const. et $V=$ const.

Les courbes d'une de ces familles ne passent évidemment *toutes* par aucun point double de la surface de Kummer $\mathfrak{K}$.

On établit sans difficulté, en suivant la marche du nº **25**, les propositions suivantes, dont plusieurs se trouvent déjà énoncées dans notre Mémoire *Sur les surfaces de Kummer elliptiques* (¹).

80. Posons toujours $\Delta=n^2$; chaque courbe $U=$ const. s'obtient individuellement en annulant une fonction thêta elliptique de U, paire, et d'ordre deux : si l'on revient aux variables anciennes, u et v, à cette fonction correspond une fonction intermédiaire singulière normale, de caractéristique nulle, et paire, pour laquelle les indices sont

$$l=\beta+n, \qquad k=-2.$$

Il y a *deux* de ces fonctions linéairement distinctes.

Or ce nombre, *deux*, est compris dans la formule générale, $\frac{\delta+4}{2}$, du nº **42**, qui donne le nombre des fonctions normales paires, de caractéristique nulle, d'indices l, k; δ désignant toujours $l^2+\beta kl+\alpha k^2$: pour $\delta=0$, $\frac{\delta+4}{2}$ est bien égal à 2.

Le degré des courbes $U=$ const. s'obtient (nºˢ **36** et **50**) par la formule générale $2l+\beta k$, ce qui donne $2n$.

(¹) *American Journal of Mathematics*, t. XVI.

Les courbes $V = \text{const.}$ donnent lieu à des remarques semblables; leurs indices sont :

$$l = -\beta + n, \qquad k = 2;$$

elles sont aussi de degré $2n$.

On verrait sans difficulté que toutes ces courbes sont de genre un; les courbes $U = \text{const.}$ ont le même module; de même, les courbes $V = \text{const.}$

On démontre enfin, par les raisonnements mêmes du cas général, que pour les indices

$$l = \tfrac{1}{2}(\beta + n), \qquad k = -1.$$

et pour chacune des *quatre* caractéristiques remarquables

$$\omega \equiv l\omega', \qquad \theta' \equiv \theta(l + \beta),$$

il existe $\frac{\delta + 2}{2}$, c'est-à-dire *une* fonction normale, soit paire, soit impaire, s'annulant pour quatre demi-périodes, conformément aux Tableaux du n° **62**.

Mêmes résultats pour les indices

$$l = \tfrac{1}{2}(-\beta + n), \qquad k = 1.$$

Il y a ainsi, dans la série des courbes $U = \text{const.}$ ou $V = \text{const.}$, quatre courbes remarquables, passant par quatre points doubles de $\mathfrak{K}$; elles sont d'ordre $2l + \beta k$, c'est-à-dire n, et de genre zéro.

D'après cela, les courbes exclues jusqu'ici sur les surfaces de Kummer elliptiques rentrent dans le cas général, et toutes les formules précédemment établies leur sont applicables.

QUATRIÈME PARTIE.

Équations modulaires.

81. En vertu d'une proposition rappelée plus haut (n° **48**) et qui dérive d'un beau théorème de M. Appell, l'équation d'une courbe algébrique tracée sur une surface hyperelliptique quelconque s'obtient *nécessairement* en annulant une fonction intermédiaire : si donc une surface de Kummer $\mathfrak{K}$ admet une courbe algébrique qui n'existe pas sur la surface générale, c'est qu'il correspond à cette courbe une fonction intermédiaire *singulière*; $\mathfrak{K}$ est donc une surface de Kummer *singulière*.

Les surfaces hyperelliptiques répondant à des fonctions abéliennes singulières sont donc *caractérisées* par ce fait qu'on peut y tracer des courbes algébriques n'existant pas dans le cas général : on en déduit immédiatement une importante conséquence.

82. Les coordonnées d'un point d'une surface de Kummer peuvent s'exprimer en fonction rationnelle de deux paramètres, x et y, et des deux radicaux

$$\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)(1-\mu x)(1-\nu x)},$$

$$\sqrt{y(1-y)(1-\lambda y)(1-\mu y)(1-\nu y)};$$

les constantes λ, μ, ν (ou leurs racines carrées) sont les *modules* des fonctions abéliennes liées à la surface. Exprimons maintenant qu'une surface ainsi définie paramétriquement admet une courbe algébrique de degré donné, n'existant pas dans le cas où λ, μ, ν sont quelconques : nous arrivons évidemment à une ou plusieurs relations *algébriques* entre ces modules λ, μ, ν. D'ailleurs, dans le cas d'une surface *une fois* singulière, c'est-à-dire dans le cas où les périodes g, h, g' ne sont liées que par une seule relation singulière, il ne peut exister entre les

modules qu'une seule relation, laquelle est nécessairement algébrique par ce qui précède. Ainsi :

A toute relation singulière entre les périodes d'une fonction abélienne de genre deux, correspond une relation algébrique entre les modules.

Nous nommerons cette relation *équation modulaire;* dans ce qui suit, nous nous proposerons de former l'équation modulaire qui correspond à une relation singulière donnée entre les périodes.

83. La méthode que nous suivrons consistera essentiellement à exprimer que la surface de Kummer admet des courbes algébriques n'existant pas dans le cas général; au lieu de traiter le problème dans l'espace, nous le ramènerons à une question de géométrie plane, en projetant sur un plan la surface et les courbes qu'on y peut tracer, le point de vue étant un des seize points doubles, que nous supposerons toujours être le point (11').

Avant d'aller plus loin, nous devons entrer dans quelques explications, relativement à cette projection.

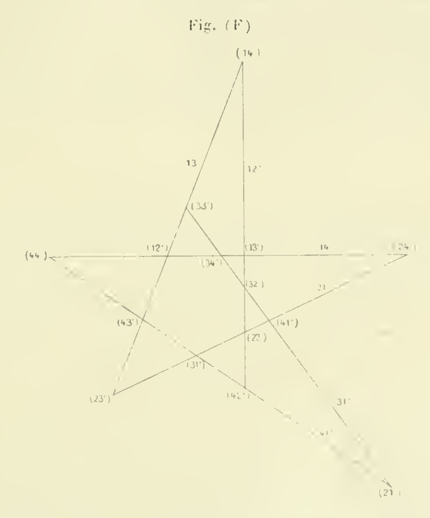
84. La figure (F), ci-dessous, représente la section par un plan quelconque, II, des six plans singuliers de la surface de Kummer passant par le point double (11') : ces six droites forment, comme on sait, le contour apparent de la surface sur le plan II.

Sur chacune des six droites on a inscrit le symbole du plan singulier correspondant : 12', 13', 14', 21', 31', 41'; au point d'intersection de deux droites, on a marqué le symbole du point double, autre que (11'), commun aux deux plans singuliers correspondants, de sorte que les quinze points où les six droites se coupent deux à deux sont les projections, sur le plan II et à partir du point double (11'), des quinze autres points doubles de la surface.

Soit maintenant une courbe C, tracée sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, et rencontrée en un seul point mobile par chacun des rayons qui la projettent à partir du point (11') : sa projection sur le plan II sera une courbe Σ *inscrite* au contour apparent de $\mathfrak{K}$, c'est-à-dire une courbe tangente aux six droites de la figure (F) en tous les points où elle

les rencontre, les points doubles du contour, c'est-à-dire les points d'intersection des six droites entre elles, *étant seuls exceptés*.

Fig. (F)



85. Inversement, une courbe Σ donnée dans le plan Π et inscrite au système des six droites, est-elle la perspective d'une courbe C de la surface de Kummer, rencontrée en un seul point par les rayons qui la projettent : en d'autres termes, le cône qui a pour sommet le point double (11') et pour base la courbe Σ coupe-t-il la surface $\mathfrak{K}$ suivant *deux* courbes distinctes.

Supposons que le point (11') soit pris pour le sommet $x=0$, $y=0$, $z=0$ du tétraèdre de référence; l'équation de $\mathfrak{K}$ est de la forme

$$(1) \qquad U_2 t^2 + 2 U_3 t + U_4 = 0,$$

U_2, U_3, U_4 étant des polynomes homogènes en x, y, z de degrés marqués par l'indice. Le cône circonscrit à $\mathfrak{K}$ à partir du point (11') est $U_3^2 - U_2 U_4 = 0$, et se décompose en six plans, qui sont les six plans singuliers passant par (11'); on a donc identiquement

$$U_3^2 - U_2 U_4 = P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6.$$

Cela posé, pour qu'un cône de sommet (11') coupe $\mathfrak{K}$ suivant deux courbes distinctes, il faut et il suffit évidemment que, *sur ce cône*, les deux valeurs de t, tirées de l'équation (1), soient rationnelles en x, y, z, c'est-à-dire que $U_3^2 - U_2 U_4$, ou le produit $P_1 P_2 \ldots P_6$, soit rationnel. En d'autres termes, en désignant par $\Sigma = 0$ l'équation du cône, ou celle de sa base dans le plan Π *pris pour plan* $t = 0$, il faut et il suffit qu'on ait identiquement

$$N^2 P_1 P_2 \ldots P_6 \equiv M^2 + \Sigma Q,$$

N, M, Q étant des polynomes en x, y, z. *Telle est la condition à laquelle doit satisfaire la courbe inscrite* Σ : on voit que toute courbe inscrite au système des six droites P_i ne répond pas à la question, car en général pour une telle courbe Σ', on a seulement l'identité

$$R P_1 P_2 \ldots P_6 \equiv M^2 + \Sigma' Q,$$

le polynome R n'étant pas nécessairement un carré.

86. Observons, pour terminer ces généralités, que les six plans singuliers passant par (11') touchent un cône du second ordre, celui des tangentes à la surface de Kummer au point double (11'); on sait de plus que si l'on fait correspondre d'une manière univoque un paramètre x à chacun des plans tangents de ce cône, et si $a_1, a_2, \ldots, a_6$ sont les valeurs du paramètre correspondant aux six plans singuliers considérés, les fonctions hyperelliptiques liées à la surface de Kummer dépendent du radical

$$\sqrt{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_6)}.$$

Le problème de former les équations modulaires ou, ce qui est la même chose, les équations entre $a_1, a_2, \ldots, a_6$, revient donc à trouver, pour chaque relation singulière entre les périodes, une relation géométrique *caractéristique* entre les six plans singuliers qui passent par (11'), ou *entre les six droites* (*tangentes à une même conique*) *de la figure* (F) *qui précède*.

87. Pour mieux faire comprendre la méthode que nous suivrons,

nous l'appliquerons d'abord aux deux cas particuliers non elliptiques les plus simples, à savoir ceux où l'invariant Δ de la relation singulière entre les périodes, et qui est nécessairement de la forme $4N$ ou $4N+1$, a l'une des valeurs 5 et 8; le cas de $\Delta = 1$ a été exclu au n° **17** comme ne correspondant pas à de véritables fonctions abéliennes; celui de $\Delta = 4$ est elliptique, et nous en dirons de suite quelques mots.

Cas de $\Delta = 4$.

88. La relation singulière entre les périodes peut se ramener à la forme (n° **12**)

$$-g + g' = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\alpha = -1, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 1.$$

On a pour δ

$$\delta = l^2 - k^2.$$

On sait (n° **80**) qu'il existe sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$ deux séries, simplement infinies chacune, de courbes de genre 1 et de degré $2\sqrt{\Delta}$, c'est-à-dire de *biquadratiques gauches;* dans chaque série, quatre des biquadratiques se réduisent à des courbes d'ordre moitié moindre, c'est-à-dire à des *coniques,* passant chacune par quatre points doubles de $\mathfrak{K}$. Ces coniques correspondent (n° **80**) aux indices $l = 1$, $k = 1$ pour une série, et $l = 1$, $k = -1$ pour l'autre; les Tableaux du n° **62** montrent qu'une conique du premier groupe et une conique du second passent par les quatre mêmes points doubles : par exemple, deux coniques passent par les points

$$(11'), \quad (22'), \quad (33'), \quad (44').$$

Projetons l'une d'elles sur le plan Π à partir du point $(11')$; la perspective est une droite Σ qui passe par les trois points marqués $(22')$, $(33')$, $(44')$ de la figure (F). Ainsi, pour une surface de Kummer elliptique, d'invariant $\Delta = 4$, ces trois points sont en ligne droite, c'est-à-dire que :

Si une surface de Kummer elliptique a pour invariant QUATRE,

les six plans singuliers qui passent par un quelconque de ses points doubles, et qui touchent comme d'ordinaire un cône du second ordre, forment trois couples en involution.

On peut transformer cette propriété par polaires réciproques : la surface de Kummer étant sa propre transformée dans dix corrélations, qui font correspondre les points singuliers aux points doubles et inversement, on arrive à ce résultat bien connu :

Sur une surface de Kummer elliptique répondant à $\Delta = 4$, *les six points doubles situés sur une même conique d'un plan singulier forment trois couples en involution ou, ce qui revient au même, un hexagone de Brianchon.*

Une pareille surface est le *tétraédroïde* de Cayley : *réciproquement,* toute surface de Kummer jouissant de la propriété précédente est un tétraédroïde; M. Klein l'a établi (*Math. Annalen*, t. II, p. 217), et cela résulterait aisément d'ailleurs des méthodes générales qui vont être développées.

Cas de $\Delta = 5$.

89. La relation singulière entre les périodes peut alors se ramener (n° **12**) au type

$$-g + h + g' = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\alpha = -1, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 1.$$

La quantité δ est ici

$$\delta = l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 = l^2 + kl - k^2.$$

Les valeurs $l = 1$, $k = 1$ sont telles que

$$2l + \beta k > \sqrt{\Delta} \bmod k;$$

il y a donc (n° **29**) des fonctions intermédiaires singulières d'indices 1, 1 : pour ces valeurs de l et k, δ prend la valeur 1; par suite (n° **45**),

il existe *une* fonction intermédiaire normale, de caractéristique donnée quelconque et d'indices 1, 1 : cette fonction est soit paire, soit impaire, selon la caractéristique. A une des *seize* fonctions ainsi définies correspond, sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, une courbe d'ordre $2l+3k$, ou *trois* (n° **50**); passant par *six* points doubles de $\mathfrak{K}$ (n° **61**) et *unicursale* (n° **72**) : ainsi, dans le cas de $\Delta = 5$, la surface de Kummer admet *seize cubiques gauches*, dont chacune passe par six points doubles, et qui se déduisent de l'une d'elles (n° **46**) par l'addition de demi-périodes aux arguments hyperelliptiques u, v.

Il y a d'ailleurs sur $\mathfrak{K}$ *seize autres cubiques gauches*, qui correspondent aux indices $l=2$, $k=-1$, pour lesquels on a encore $\delta = 1$ et $2l+3k=3$: les Tableaux du n° **60** permettent d'étudier, avec la plus grande facilité, la disposition six à six des seize points doubles sur les trente-deux cubiques ; nous n'insisterons pas sur ce point.

Parmi les seize cubiques de chaque groupe, *six* passent par le point double $(11')$ (n° **61**). La cubique qui répond aux indices 1, 1 et à la caractéristique nulle ne passe pas par ce point ; elle contient (n° **60**) les points $(24')$, $(44')$, $(23')$, $(32')$, $(34')$, $(41')$: pour en déduire une des cubiques passant par $(11')$, il suffit d'ajouter la demi-période qui correspond à $\varepsilon=0$, $\varepsilon'=1$, $\lambda=1$, $\lambda'=0$: car le nouveau groupe de six points doubles se déduit du précédent en permutant 1 et 4, 2 et 3 dans les symboles ci-dessus (n° **55**), ce qui donne les points

$$(34'),\quad (14'),\quad (33'),\quad (22'),\quad (24'),\quad (11').$$

90. Projetons maintenant cette seconde cubique sur le plan Π à partir de $(11')$, la perspective est une conique Σ qui passe par les cinq points de la figure (F) marqués $(34')$, $(14')$, $(33')$, $(22')$, $(24')$, et qui est inscrite au système des six droites de la figure. Comme les cinq points indiqués sont des points doubles de ce système et qu'ils sont les sommets d'un pentagone formé par cinq des six droites (*voir* la figure), la conique Σ doit toucher la sixième droite $41'$.

Nous obtenons ainsi une propriété simple des six plans singuliers de $\mathfrak{K}$ qui passent par le point double $(11')$, dans le cas où les périodes des fonctions abéliennes correspondantes vérifient une relation singulière d'invariant 5 :

Les six points doubles situés sur une même conique de la surface de Kummer singulière qui répond à $\Delta = 5$, sont tels qu'il existe une conique passant par l'un d'eux et inscrite à un pentagone formé par les cinq autres.

91. *Réciproquement,* montrons que si cette condition ou la condition corrélative est satisfaite, la surface de Kummer est nécessairement singulière, et que l'invariant correspondant est 5.

92. L'hypothèse est qu'il existe, dans le plan Π, une conique Σ, tangente à une des six droites de la figure (F), et circonscrite à un des pentagones formés par les cinq autres; je dis que le cône qui a pour base la conique Σ et pour sommet le point (11′) coupe la surface de Kummer $\mathfrak{K}$ suivant deux courbes distinctes. Soit, en effet, $M = 0$ l'équation d'une cubique quelconque du plan Π, passant par les cinq sommets du pentagone précédent et par le point de contact q de la conique Σ avec la sixième droite; en désignant toujours par $P_1 = 0, \ldots, P_6 = 0$ les équations des six droites, la courbe d'ordre *six*

$$P_1 P_2 \ldots P_6 - \theta M^2 = 0,$$

où θ est un paramètre quelconque, a évidemment pour points doubles les cinq sommets du pentagone, et touche la sixième droite au point q. Cette courbe a ainsi, avec la conique Σ, *douze* intersections qui sont fixes quand θ varie; si θ est choisi de manière qu'elle passe par un nouveau point de Σ, elle se décomposera en deux courbes, dont l'une est Σ, de sorte qu'on aura *identiquement*

$$P_1 P_2 \ldots P_6 = \theta_0 M^2 + \Sigma Q,$$

ce qui démontre bien (n° 85) que le cône du second ordre de sommet (11′) et de base Σ coupe $\mathfrak{K}$ suivant *deux courbes distinctes*, C *et* C′.

La conique Σ passe par cinq des points de rencontre des six droites de la figure (F) : les deux courbes C et C′ passent donc, simplement chacune, par cinq points doubles de $\mathfrak{K}$ et ne passent par aucun autre point double, sauf peut-être le point (11′). Elles passent nécessairement par ce point, qui est d'ordre de multiplicité impair sur chacune

d'elles; car, en vertu des résultats des nos **58-65**, il n'existe pas de courbe algébrique sur une surface de Kummer passant simplement par cinq points doubles seulement. D'ailleurs les cinq points doubles en question et le point (11′) ne sont pas dans un même plan singulier de $\mathfrak{K}$, puisque les cinq sommets du pentagone auquel la conique Σ est circonscrite ne sont pas sur *une* des six droites de la figure (F) : il en résulte que $\mathfrak{K}$ admet des courbes algébriques passant, avec des ordres impairs de multiplicité, par six points doubles non situés dans un même plan, ce qui ne se présente pas (n° **58**) pour des courbes non singulières, ni pour des courbes singulières dont l'indice k est pair : $\mathfrak{K}$ *est donc une surface de Kummer singulière*, et les seconds indices k, k' relatifs à C et C′ sont impairs.

95. Soit alors

$$\alpha g + \beta h + g' = 0$$

la relation singulière qui correspond à $\mathfrak{K}$; désignons par l et k les indices de C; par $2q+1$ l'ordre de multiplicité de (11′) sur cette courbe. Le degré de C est $2l+\beta k$ (n° **50**); son genre est zéro, car elle correspond point par point à sa projection, la conique Σ; de plus elle ne peut évidemment admettre d'autre point multiple que (11′). On a alors, en écrivant que la projection de C à partir de (11′) est d'ordre deux, et en appliquant la formule (16) du n° **75** sur le genre,

$$\begin{aligned} 2 &= 2l + \beta k - (2q+1), \\ 0 &= l^2 + \beta k l + \alpha k^2 - s + 2 - 2q(q+1). \end{aligned}$$

Ici $s=3$; éliminant q entre ces relations, on trouve, en posant $\Delta = \beta^2 - 4\alpha$:

$$\Delta = \frac{6-(2l+\beta k-4)^2}{k^2},$$

d'où, nécessairement, puisque k doit être impair et Δ positif de l'une des formes $4N$ ou $4N+1$,

$$\Delta = 5. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

94. *Équation modulaire.* — En vertu de ce qui précède et du n° **86**, pour exprimer que le radical

$$\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_6)}$$

conduit à des fonctions abéliennes singulières *avec l'invariant cinq*, il suffit de considérer une conique dont les tangentes correspondent d'une manière univoque à un paramètre, et d'écrire qu'il existe une seconde conique touchant la tangente de paramètre a_6, et circonscrite à un pentagone formé par les tangentes de paramètres a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, prises dans un ordre quelconque.

Pour simplifier, supposons $a_6 = \infty$, ce qui ne diminue pas la généralité; le radical est alors

$$\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_5)};$$

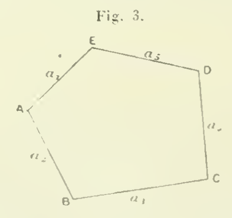
prenons pour conique fondamentale la parabole $y = x^2$, dont les tangentes ont pour équation générale

$$y + 2\theta x + \theta^2 = 0,$$

θ étant un paramètre arbitraire; à $\theta = \infty$ correspond la droite de l'infini.

Pour déterminer le pentagone, prenons les cinq tangentes qui correspondent aux valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_5$ de θ, dans l'ordre a_1, a_2, a_3, a_4, a_5: il s'agit d'exprimer que la conique qui passe par les cinq som-

Fig. 3.



mets A, B, C, D, E touche la droite de l'infini, c'est-à-dire est une parabole.

Le problème ne présente aucune difficulté, et voici le résultat final :

Pour que le radical

$$\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)}$$

conduise à des fonctions abéliennes dont les périodes normales soient liées par une relation singulière d'invariant CINQ, *la condition est*

$$\begin{aligned} & 4\,[a_1^2(a_3-a_4)+a_2^2(a_4-a_5)+a_3^2(a_5-a_1)+a_4^2(a_1-a_2)+a_5^2(a_2-a_3)] \\ & \times[a_1^2(a_3-a_4)a_2a_5+a_2^2(a_4-a_5)a_3a_1+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_5^2(a_2-a_3)a_1a_4] \\ = & \;[a_1^2(a_3-a_4)(a_2+a_5)+a_2^2(a_4-a_5)(a_3+a_1)+\ldots+a_5^2(a_2-a_3)(a_1+a_4)]^2. \end{aligned}$$

95. *Remarque.* — Si le radical était pris sous la forme générale $\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_6)}$, on passerait de ce cas au précédent par la substitution $t=\frac{1}{x-\alpha_6}$, α_6 désignant une *quelconque* des six racines. Les racines du polynome du cinquième ordre en t qui figure maintenant sous le radical sont $\frac{1}{\alpha_i-\alpha_6}$, $(i=1, 2, 3, 4, 5)$, et il suffit de les substituer *dans un ordre quelconque*, aux $a_1, a_2, \ldots a_5$ de la formule précédente pour avoir la condition cherchée.

96. *Conséquences géométriques.* — *Si la conique* Σ *existe dans le plan* Π, on vient de voir que la surface $\mathfrak{K}$ est singulière et correspond à l'invariant cinq : outre la cubique dont la perspective est Σ, la surface $\mathfrak{K}$ admet *onze* autres cubiques passant par (11'), (n° **89**); par suite il existe, dans le plan Π, onze coniques analogues à Σ, c'est-à-dire tangentes à une des six droites de la figure (F) et circonscrites à un pentagone formé par les cinq autres droites.

Les Tableaux et les résultats du n° **60** permettent d'étudier la disposition des points doubles de $\mathfrak{K}$ sur les onze nouvelles cubiques, c'est-à-dire la disposition des pentagones inscrits aux onze nouvelles coniques du plan Π; on arrive ainsi à un théorème de Géométrie élémentaire, qu'il est intéressant de rattacher aux fonctions abéliennes, et que nous énonçons sous sa forme corrélative :

Soient a, b, c, d, e, f six points d'une conique : s'il existe une conique passant par f et inscrite au pentagone dont les sommets successifs sont a, b, c, d, e, il existera une autre conique passant par a et inscrite au pentagone dont les sommets successifs sont f, c, b, e, d.

Comme a est un quelconque des sommets du premier pentagone, on obtient ainsi non pas une, mais *cinq* coniques nouvelles; ces cinq coniques et la conique inscrite au premier pentagone sont les perspectives des six cubiques d'un même groupe (n° **89**) qui passent par le point (11').

Les six cubiques de l'autre groupe ont pour projection six coniques définies par la propriété suivante, qui est connue d'ailleurs par les théorèmes de Poncelet :

Soient a, b, c, d, e, f six points d'une conique : s'il existe une conique passant par f et inscrite au pentagone dont les sommets successifs sont a, b, c, d, e, il existera une autre conique passant également par f et inscrite au pentagone dont les sommets successifs sont a, c, e, b, d.

A chacune des six premières coniques correspond ainsi une des six coniques du second groupe.

Cas de $\Delta = 8$.

97. La relation singulière entre les périodes peut se ramener à la forme (n° **12**)

$$-2g + g' = 0;$$

par suite

$$\alpha = -2, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 1,$$

et

$$\delta = l^2 - 2k^2.$$

Les valeurs $l = 2$, $k = 1$ conviennent pour indices de fonctions intermédiaires singulières (n° **29**) et donnent $\delta = 2$. Il existe donc (n° **42**) $\frac{\delta + 2}{2}$, c'est-à-dire *deux* fonctions normales, de caractéristique

nulle, et d'indices 2, 1; géométriquement, on peut ainsi tracer sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$ une série *simplement infinie* de courbes d'ordre $2l$, c'est-à-dire d'ordre *quatre* : ces courbes passent par les quatre points doubles de $\mathfrak{K}$ dont les symboles sont (nº **65**)

$$(32'), \quad (34'), \quad (42'), \quad (44');$$

elles sont de genre *un* (nº **72**).

Pour $l = 2$, $k = -1$ et la caractéristique nulle, on obtient de même une seconde série simplement infinie de biquadratiques gauches (de genre *un*) passant par les quatre mêmes points, et l'on voit sans difficulté qu'une biquadratique quelconque de la première série et une quelconque de la seconde sont sur une surface du second ordre.

A chacune des *trois* autres caractéristiques remarquables (nºs **45** et **65**) correspondent de même (pour $l = 2$, $k = \pm 1$) deux séries de biquadratiques, passant toutes par quatre mêmes points doubles de $\mathfrak{K}$, qui sont ici, pour chaque caractéristique :

$$\begin{array}{cccc} (31'), & (33'), & (41'), & (43'), \\ (12'), & (14'), & (22'), & (24'), \\ (11'), & (13'), & (21'), & (23'). \end{array}$$

Parmi les biquadratiques de l'une des séries qui passent par (32'), (34'), (42'), (44'), il en est *une* qui passe par (11') et qui y a nécessairement un point double (nº **74**); sa perspective sur le plan H, à partir de (11'), est une conique Σ passant par les quatre points de la figure (F) marqués (32'), (34'), (42'), (44') et inscrite au système des six droites de cette figure : comme les quatre points indiqués sont les sommets du quadrilatère formé par les droites 31', 12', 41', 14', la conique Σ touche les deux autres droites 13' et 21'. Donc, corrélativement :

Les six points doubles situés sur une même conique de la surface de Kummer singulière qui répond à $\Delta = 8$ sont tels qu'il existe une conique passant par deux d'entre eux et inscrite à un quadrilatère formé par les quatre autres.

98. *Réciproquement*, on établit comme au n° **92** que si cette condition est vérifiée, c'est-à-dire si la conique Σ existe, le cône qui a (11′) pour sommet et Σ pour base coupe $\mathfrak{K}$ suivant *deux courbes distinctes*, C et C′.

Ces courbes, en vertu de l'hypothèse, passent, simplement chacune, par les quatre points doubles de $\mathfrak{K}$ de symboles (32′), (34′), (42′), (44′), et ne passent par aucun autre point double, sauf, peut-être, par (11′).

Il n'y a, sur aucune surface de Kummer, de courbe algébrique passant simplement (ou avec des ordres de multiplicité impairs) par cinq points doubles (n^{os} **58-65**), il faut donc que (11′) soit, sur C et C′, un point de multiplicité paire (l'ordre zéro pouvant convenir); enfin comme une surface de Kummer non singulière n'admet pas de courbe algébrique passant simplement par quatre points doubles (n° **58**), $\mathfrak{K}$ est nécessairement *une surface singulière*, et les courbes C, C′ sont des courbes singulières. Leur genre est zéro, puisque chacune correspond point par point à sa projection, la conique Σ; les indices k qui leur correspondent sont impairs (n° **58**).

Soit alors $\alpha g + \beta h + g' = 0$ la relation singulière qui correspond à $\mathfrak{K}$; désignons par l et k les indices de la courbe C, par $2r$ l'ordre de multiplicité sur cette courbe du point (11′), qui est évidemment son seul point singulier. On a, en écrivant les formules relatives au degré et au genre de C, comme au n° **95**,

$$2 = 2l + \beta k - 2r,$$

$$0 = \frac{1}{2}[l^2 + \beta kl + \alpha k^2 + s - 2] - r^2.$$

Ici $s = 2$; l'élimination de r entre ces équations donne, en posant toujours $\Delta = \beta^2 - 4\alpha$,

$$\Delta = \frac{8 - (2l + \beta k - 4)^2}{k^2},$$

et comme Δ doit être entier, positif de l'une des formes $4N$ ou $4N + 1$, et que k est impair, les seules valeurs admissibles sont $\Delta = 8$ et $\Delta = 4$.

Ainsi, la condition énoncée plus haut, c'est-à-dire l'existence de la

conique Σ, entraîne, pour la surface de Kummer considérée, la nécessité d'être singulière avec l'invariant 4 ou l'invariant 8; en traduisant analytiquement cette condition, on trouvera donc à la fois les équations modulaires pour $\Delta = 4$ et pour $\Delta = 8$.

99. *Équation modulaire.* — Pour l'obtenir, prenons le radical fondamental sous la forme

$$\sqrt{x(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)};$$

considérons la parabole $y = x^2$ et les six tangentes

$$y + 2\theta x + \theta^2 = 0,$$

qui correspondent aux valeurs ∞, 0, a_1, a_2, a_3, a_4 de θ : il faut exprimer, d'après ce qui précède, qu'il existe une conique circonscrite au quadrilatère formé par les quatre dernières tangentes, prises dans l'ordre a_1, a_2, a_3, a_4, et touchant les deux premières, à savoir la droite de l'infini et la droite $y = 0$. Le calcul ne présente aucune difficulté; on trouve en facteur la quantité $(a_1 a_3 - a_2 a_4)^2$, qui, égalée à zéro, exprime que les six tangentes forment trois couples $(0, \infty; a_1, a_3; a_2, a_4)$ en involution : *c'est l'équation modulaire du tétraédroïde* (n° **88**). L'autre facteur obtenu est l'équation modulaire pour $\Delta = 8$, d'où le théorème :

Pour que le radical $\sqrt{x(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}$ *conduise à des fonctions abéliennes dont les périodes normales soient liées par une relation singulière d'invariant* HUIT, *la condition est*

$$\begin{aligned} 4a_1a_2a_3a_4[(a_1+a_3)(a_2+a_4) - 2a_1a_3 - 2a_2a_4]^2 \\ = (a_2-a_4)^2(a_1-a_3)^2(a_1a_3+a_2a_4)^2. \end{aligned}$$

100. *Remarque.* — On en déduirait sans difficulté, comme au n° **95**, la formule correspondante, lorsque le polynome sous le radical est du sixième degré, et de racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$.

101. *Conséquences géométriques.* — En considérant les autres séries de biquadratiques qui passent simplement par quatre points doubles de $\mathfrak{K}$ (n° **97**) autres que (11′), on obtient, *en tout*, *six* de ces biquadratiques ayant un point double en (11′); on voit de suite qu'elles sont deux à deux sur *trois* cônes du second ordre ayant (11′) pour sommet; il y a dès lors dans le plan Π *trois* coniques Σ, sections de ces trois cônes par le plan. En se reportant au Tableau des points doubles par lesquels passent les biquadratiques et en raisonnant comme au n° **96**, on arrive à cette proposition élémentaire :

Soient, sur une conique, trois couples de points non en involution; s'il existe une conique passant par les points d'un des couples et inscrite au quadrilatère qui a pour sommets opposés les points de chacun des deux autres couples, il existera deux autres coniques analogues qu'on obtient par la permutation des trois couples.

Ce théorème est d'ailleurs bien facile à établir directement; il est curieux de le voir lié aux propriétés d'une surface de Kummer singulière.

102. *Remarque.* — Il convient de rapprocher des résultats obtenus dans les cas de $\Delta = 5$ et $\Delta = 8$ une proposition que nous avons établie ailleurs ([1]) pour le cas *elliptique* de $\Delta = 9$.

Si $\Delta = 9$, la surface de Kummer correspondante admet (n° **80**) deux groupes de quatre cubiques gauches, passant chacune par quatre points doubles; dans chaque groupe, une cubique, et une seule, passe par un point double donné de $\mathfrak{K}$, (11′) par exemple. En la projetant sur le plan Π à partir de ce point, on obtient une conique Σ, inscrite au triangle formé par trois des droites de la figure (F) et circonscrite au triangle formé par les trois autres. On démontre sans difficulté que, réciproquement, si la conique Σ existe, la surface de Kummer est singulière et répond à l'invariant *neuf*. Ainsi, par corrélation :

([1]) *American Journal of Mathematics*, t. XVI, p. 238. M. O. Bolza a retrouvé la même propriété dans un Mémoire des *Math. Annalen;* il a bien voulu, par une Note publiée dans le t. LI du même Recueil, reconnaître notre priorité

Les six points doubles situés sur une même conique d'une surface de Kummer singulière qui répond à $\Delta = 9$, *sont tels qu'il existe une conique passant par trois de ces points et inscrite au triangle formé par les trois autres. Réciproquement, cette propriété n'appartient qu'à une surface de Kummer singulière d'invariant neuf.*

L'*équation modulaire* correspondante se déduit de là avec la plus grande facilité.

Cas général d'un invariant Δ pair.

103. Pour former l'équation modulaire dans le cas d'un invariant pair, ou pour trouver une propriété géométrique, caractéristique de ce cas, appartenant aux six plans singuliers qui passent par un même point double de la surface de Kummer correspondante (n° 86), on s'appuiera sur deux propositions.

Théorèmes fondamentaux.

104. I. *Soit une surface de Kummer* $\mathfrak{K}$, *jouissant de la propriété suivante :*

Les six droites suivant lesquelles les six plans singuliers passant par un même point double coupent un plan quelconque sont telles qu'il existe un système, p *fois infini, de courbes* Σ, *indécomposables, de genre* p *et de degré* 2λ, *dont chacune passe par les quatre sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites et touche, partout ailleurs, les six droites en tous les points où elle les rencontre :*

1° *La surface* $\mathfrak{K}$ *est singulière; son invariant* Δ *est pair et a pour maximum*

$$\Delta = 8(\lambda^2 - p). \tag{1}$$

$\lambda^2 - p$ *est dès lors nécessairement positif ;*

2° *Réciproquement, toute surface de Kummer singulière dont l'invariant est de la forme* (1) *jouit de la propriété géométrique indiquée.*

105. II. *Soit une surface de Kummer $\mathfrak{K}$, jouissant de la propriété suivante :*

Les six droites définies plus haut peuvent se répartir en trois couples, de telle sorte qu'il existe un système, p fois infini, de courbes Σ, indécomposables, de genre p et de degré $2\lambda+1$, dont chacune passe par les sommets des trois couples et touche, partout ailleurs, les six droites en tous les points où elle les rencontre :

1° *La surface $\mathfrak{K}$ est singulière; son invariant Δ est pair et a pour maximum*

$$(2) \qquad \Delta = 4[2\lambda(\lambda+1) - 2p + 1],$$

$\lambda(\lambda+1) - p$ *est dès lors nécessairement positif;*

2° *Réciproquement, toute surface de Kummer singulière dont l'invariant est de la forme* (2) *jouit de la propriété géométrique indiquée.*

106. *Remarque.* — On peut reconnaître directement que l'existence des courbes Σ, définies ci-dessus, entraîne bien une relation modulaire, c'est-à-dire une relation entre les six droites de la figure (F).

Plaçons-nous, par exemple, dans le cas du théorème I : les courbes Σ sont d'ordre 2λ, de genre p, et sont soumises, par les conditions de passer par quatre points et de toucher partout ailleurs les six droites, à 6λ conditions. Leur équation générale doit donc, *a priori*, renfermer un nombre de paramètres égal à

$$\tfrac{1}{2}2\lambda(2\lambda+3) - \tfrac{1}{2}(2\lambda-1)(2\lambda-2) + p - 6\lambda,$$

c'est-à-dire $p-1$. Or l'hypothèse est que ce nombre est p, ce qui établit bien une relation entre les six droites.

Un calcul analogue s'applique au cas du théorème II.

Avant de donner la démonstration des théorèmes fondamentaux, montrons comment on peut les appliquer à la formation de la propriété caractéristique modulaire.

Équations modulaires.

107. Pour obtenir l'équation ou la propriété géométrique modulaire qui correspond à un invariant Δ pair, nous distinguerons, puisque Δ est multiple de 4, les deux cas de

$$\Delta = 8N \qquad \text{et} \qquad \Delta = 8N + 4.$$

108. Supposons obtenues les équations ou propriétés modulaires pour tous les invariants Δ pairs, jusqu'à $\Delta = 8N$, *exclusivement*.

Faisons dans la formule (1) $\Delta = 8N$, ce qui donne

$$N = \lambda^2 - p.$$

Prenons, pour λ, le plus petit entier positif dont le carré atteigne ou dépasse N; on a alors p par la formule

$$p = \lambda^2 - N.$$

Il résulte alors du théorème fondamental I que, pour la surface de Kummer singulière d'invariant $8N$, les six droites de la figure (F) sont telles qu'il existe un système, p fois infini, de courbes Σ, d'ordre 2λ et de genre p, dont chacune passe par les quatre sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites, et touche ces droites en tous les autres points où elle les rencontre.

C'est bien là une propriété des six droites, c'est-à-dire une *propriété modulaire;* réciproquement, en vertu du théorème I, elle ne peut appartenir en outre qu'à des surfaces de Kummer singulières *d'invariants pairs, et inférieurs à* $8N$. Si donc on traduit analytiquement la propriété précédente (ce qui peut se faire par un nombre fini d'opérations algébriques), on obtient, non seulement l'équation modulaire pour $\Delta = 8N$, mais les équations modulaires pour certains invariants pairs plus petits, équations qu'on a supposées obtenues au préalable. Il ne restera donc qu'à débarrasser l'équation modulaire complète de fac-

teurs connus d'avance, pour avoir, sans facteur étranger, l'équation modulaire cherchée relative à $\Delta = 8N$ (¹).

109. Supposons de même obtenues les équations modulaires pour les invariants pairs jusqu'à $\Delta = 8N + 4$, exclusivement. Partons cette fois de la formule (2) où nous ferons $\Delta = 8N + 4$:

$$4N + 1 = (2\lambda + 1)^2 - 4p.$$

Prenons, pour $2\lambda + 1$, le plus petit entier impair dont le carré atteigne ou dépasse $4N + 1$; p aura la valeur

$$p = \lambda(\lambda + 1) - N.$$

Alors, par le théorème fondamental II, pour la surface de Kummer singulière d'invariant $8N + 4$, les six droites de la figure (F) peuvent se répartir en trois couples, de manière qu'il existe un système p fois infini, de courbes Σ, de genre p et d'ordre $2\lambda + 1$, dont chacune passe par les sommets des trois couples et touche en λ points chacune des six droites.

C'est là une propriété modulaire qui, d'après le théorème II, ne peut appartenir en outre qu'à des surfaces de Kummer singulières, d'invariants pairs et inférieurs à $8N + 4$. On voit dès lors, comme plus haut, qu'on pourra obtenir, débarrassée de facteurs étrangers, l'équation modulaire pour $\Delta = 8N + 4$.

110. Le problème de la formation des équations modulaires, dans le cas d'un invariant pair, peut donc être considéré comme résolu *théoriquement*, par une méthode *algébrique* qui permet d'opérer de proche en proche : mais, *pratiquement*, la solution analytique serait fort difficile à obtenir, même dans des cas très simples, à cause de la longueur des calculs. La Géométrie du moins, en substituant la propriété modulaire à l'équation algébrique, donne une idée assez nette du résultat : nous y reviendrons d'une manière plus étendue aux nos **124-131**.

(¹) Nous reviendrons plus loin (nº **131**) sur les facteurs étrangers.

Il nous reste maintenant à démontrer les théorèmes fondamentaux.

Démonstration des théorèmes fondamentaux.

111. Lemme. — *Une courbe singulière tracée sur une surface de Kummer ne peut être l'intersection complète de cette surface et d'une autre surface.*

Car, en vertu du mode même de représentation paramétrique (n° **49**), l'intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface d'ordre n s'obtient en annulant une *fonction thêta*, normale, d'ordre $2n$ et de caractéristique nulle : pour une intersection complète, l'indice k est donc nul, ce qui prouve bien qu'une telle courbe n'est *jamais* singulière.

112. *Corollaire.* — Le rayon, qui joint à un point double de la surface de Kummer un point d'une courbe singulière, ne rencontre pas constamment la courbe en un second point, sinon celle-ci serait l'intersection complète avec un cône ayant le point double pour sommet.

En d'autres termes, la projection sur le plan Π, à partir du point double (11'), d'une courbe singulière quelconque, est une courbe *du même genre, inscrite* au système des six droites de la figure (F) (n° **84**).

Démonstration du théorème I.

113. Supposons qu'il existe, dans le plan Π de la figure (F), des courbes Σ d'ordre 2λ, de genre p, en nombre p fois infini, dont chacune passe par les quatre sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites, et touche partout ailleurs ces six droites : *montrons d'abord que la surface de Kummer* $\mathfrak{K}$ *est singulière*, et, pour cela, établissons que le cône, qui a pour sommet le point double (11') et pour base une quelconque des courbes Σ, coupe $\mathfrak{K}$ suivant deux courbes distinctes.

114. L'équation générale des courbes Σ contient, par hypothèse, p paramètres : $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$, sous une forme évidemment algébrique.

On peut toujours, puisque le triangle de référence est arbitraire, supposer que l'équation de la courbe générale Σ contient un terme en $x^{2\lambda}$, de sorte que cette équation est de la forme

$$(3) \qquad \Sigma = x^{2\lambda} + V_1 x^{2\lambda-1} y + V_2 x^{2\lambda-1} z + \ldots = 0,$$

$V_1, V_2, \ldots$ étant des fonctions algébriques des paramètres ρ.

Soient x, y, z un point d'une courbe Σ, de paramètres $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$; $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ un point, voisin du premier, sur la courbe Σ, de paramètres $\rho_1 + d\rho_1, \ldots, \rho_p + d\rho_p$; on a

$$dx\frac{\partial\Sigma}{\partial x} + dy\frac{\partial\Sigma}{\partial y} + dz\frac{\partial\Sigma}{\partial z} + d\rho_1\frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_1} + \ldots + d\rho_p\frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_p} = 0,$$

quels que soient $d\rho_1, \ldots, d\rho_p$. Si donc (x, y, z) est un point double de la courbe Σ, les courbes

$$(4) \qquad \frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_1} = 0, \qquad \frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_p} = 0,$$

qui sont du même ordre, 2λ, que Σ, passent par ce point double : ce sont, dès lors, des courbes *adjointes* à Σ.

D'après la théorie des enveloppes, les courbes (4) passent par les quatre points communs à toutes les courbes Σ et par les $6\lambda - 4$ points où la courbe $\Sigma = 0$ touche les six droites de la figure (F) : comme, d'une manière générale, les courbes d'ordre 2λ adjointes à une courbe du même ordre et de genre p coupent celle-ci, en dehors de ses points multiples, en $2(p-1) + 6\lambda$ points, on voit que les courbes

$$(5) \qquad \theta_1\frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_1} + \theta_2\frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_2} + \ldots + \theta_p\frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_p} = 0,$$

où les θ_i sont des constantes arbitraires, coupent la courbe $\Sigma = 0$ en $2(p-1) + 6\lambda - 4 - (6\lambda - 4)$, c'est-à-dire en $2(p-1)$ points mobiles.

En d'autres termes, les courbes (5) découpent, sur la courbe $\Sigma = 0$, des groupes de $2(p-1)$ points mobiles, *parmi lesquels* $p-1$ *sont*

arbitraires, puisque l'équation (5) renferme $p - 1$ constantes arbitraires [1].

Ces groupes de points appartiennent donc, sur la courbe de genre p, $\Sigma = 0$, à un *système spécial*, dans le sens de MM. Brill et Nœther : d'ailleurs, sur une courbe de genre p et d'ordre n, le seul système spécial de $2(p-1)$ points est celui que découpent les adjointes d'ordre $n-3$; il en résulte que les $2(p-1)$ points mobiles où une quelconque des courbes (5), courbe que je désignerai par $M = 0$, coupe la courbe $\Sigma = 0$, sont sur une courbe d'ordre $2\lambda - 3$, $N = 0$, adjointe à Σ.

Cela posé, soient toujours $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, ..., $P_6 = 0$ les équations des six droites fondamentales; considérons la courbe, *d'ordre* 4λ,

$$N^2 P_1 P_2 \ldots P_6 - \theta M^2 = 0, \tag{7}$$

où θ désigne un paramètre variable, et cherchons ceux de ses points d'intersection avec Σ qui restent fixes quand θ varie.

---

[1] Pour mettre ce raisonnement à l'abri de tout reproche, il faut établir qu'il n'existe pas d'*identité* de la forme

$$A\Sigma + A_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_1} + \ldots + A_p \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_p} = 0, \tag{6}$$

les A_i étant des constantes en x, y, z, c'est-à-dire des fonctions des ρ_i. On voit d'abord que A doit être nul, puisque, d'après (3), Σ contient un terme en $x^{2\lambda}$, qui ne figure dans aucune des fonctions $\frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_i}$; en remplaçant alors Σ, $\frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_1}$, ... par leurs valeurs tirées de (3), l'identité donne naissance aux identités suivantes en $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$:

$$A_1 \frac{\partial V_1}{\partial \rho_1} + \ldots + A_p \frac{\partial V_1}{\partial \rho_p} = 0,$$

$$A_1 \frac{\partial V_2}{\partial \rho_1} + \ldots + \ldots\ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces relations prouvent que les fonctions V_i sont fonctions de $p-1$ d'entre elles, au plus; par suite, l'équation (3) de Σ ne contiendrait que $p-1$ paramètres, au lieu de p, comme c'est l'hypothèse. Il n'existe donc aucune identité de la forme (6). C. Q. F. D.

Les courbes $M = 0$, $N = 0$ étant adjointes à Σ, on voit, de suite, que les points singuliers de Σ comptent, dans l'intersection avec les courbes (7), pour

$$2[2\lambda(2\lambda - 3) - 2(p - 1)].$$

De plus, les quatre sommets du quadrilatère par lesquels passent toutes les courbes Σ et les $2(p-1)$ points communs aux courbes $M = 0$, $N = 0$, $\Sigma = 0$, sont évidemment des points doubles des courbes (7), et comptent dès lors pour

$$8 + 4(p - 1)$$

intersections.

Enfin, les courbes (7) touchent évidemment la courbe $\Sigma = 0$ aux $6\lambda - 4$ points où celle-ci est tangente aux six droites $P_i = 0$, car la courbe $M = 0$ passe par ces points, ainsi qu'on l'a vu plus haut; de là

$$12\lambda - 8$$

nouvelles intersections fixes.

On trouve ainsi, au total, que les courbes (7) ont, avec Σ, un nombre d'intersections fixes égal à

$$4\lambda(2\lambda - 3) - 4(p - 1) + 8 + 4(p - 1) + 12\lambda - 8,$$

c'est-à-dire $8\lambda^2$; comme Σ est d'ordre 2λ et les courbes (7) d'ordre 4λ, on peut déterminer θ de manière que, pour $\theta = \theta_0$, la courbe (7) ait un nouveau point de rencontre avec Σ, *qu'elle contiendra dès lors tout entière;* on aura ainsi *identiquement*

$$(8) \qquad N^2 P_1 P_2 \ldots P_6 - \theta_0 M^2 \equiv \Sigma Q,$$

ce qui prouve bien (n° 85) que le cône de sommet (11') et de base Σ coupe la surface $\mathfrak{K}$ suivant *deux* courbes algébriques distinctes, C et C', de même genre, p, que la courbe Σ, à laquelle elles correspondent point par point.

115. On en déduit immédiatement que $\mathfrak{K}$ est singulière. En effet, les courbes Σ passant simplement par quatre des points communs à deux des six droites de la figure (F), les courbes C (et C') passent

toutes, simplement, par quatre points doubles de $\mathfrak{K}$, et ne passent simultanément par aucun autre point double, le point (11′) pouvant être excepté. Comme il n'existe pas, sur une surface de Kummer ordinaire (nos **58-66**), de courbe algébrique passant simplement par quatre points doubles et ne pouvant, en outre, contenir qu'*un* autre point double, $\mathfrak{K}$ *est nécessairement une surface singulière.*

116. *Détermination de l'invariant.* — Les courbes C étant singulières et passant simplement par quatre points doubles, leur second indice k est impair et le point (11′) est, sur chacune d'elles, multiple d'ordre pair, $2r$, r pouvant être nul (nos **58** et **74**). Soit

$$\alpha g + \beta h + g' = 0$$

la relation singulière qui correspond à la surface $\mathfrak{K}$; l et k étant les indices de C, le degré de cette courbe est (n° **50**) $2l + \beta k$, et l'on a, en écrivant que la perspective Σ, de C, à partir de (11′), est de degré 2λ :

$$2\lambda = 2l + \beta k - 2r, \tag{9}$$

ce qui montre que βk, et par suite β, est pair. On peut donc supposer (n° **12**) $\beta = 0$, et la relation singulière sera

$$-N'g + g' = 0, \qquad (N' > 0)$$

de sorte que, par (9)

$$\lambda = l - r. \tag{10}$$

117. Écrivons maintenant que C est de genre p. La courbe C générale a un point multiple d'ordre $2r$ en (11′); elle peut avoir d'autres points multiples, répondant aux points multiples de sa projection Σ : en vertu de la formule (16) du n° **75** et de la remarque du n° **77**, son genre p a une expression de la forme

$$p = \tfrac{1}{2}(l^2 - N'k^2) - r^2 - p', \tag{11}$$

le terme $-p'$ (où $p' \geqq 0$) étant relatif aux points multiples autres

que (11′), et aux branches confondues que peut présenter la courbe C en ce point.

L'élimination de r entre (10) et (11) donne

$$N = \frac{2(\lambda^2 - p) - 2p' - (l - 2\lambda)^2}{k^2}$$

et, par suite, la valeur *maximum* que puisse prendre l'invariant $4N$ est, en faisant $p' = 0$, $l = 2\lambda$, $k = 1$ (car k est impair),

$$\Delta = 8(\lambda^2 - p).$$

C'est précisément ce qu'il s'agissait d'établir, conformément à l'énoncé du théorème I.

118. Il reste, pour terminer la démonstration de ce théorème, à montrer que toute surface de Kummer $\mathfrak{K}$, dont l'invariant est $8(\lambda^2 - p)$, jouit de la propriété relative aux courbes Σ, c'est-à-dire que ces courbes existent dans le plan de la figure (F).

Si Δ est de la forme $8(\lambda^2 - p)$, la relation entre les périodes peut être supposée du type

$$-2(\lambda^2 - p)g + g' = 0.$$

Considérons les indices $l = 2\lambda$, $k = 1$: ils sont admissibles, car on vérifie de suite (n° **29**) l'inégalité nécessaire et suffisante

$$2l \geqq \sqrt{\Delta} \bmod k, \qquad \text{ou} \qquad 4\lambda \geqq 2\sqrt{2(\lambda^2 - p)}.$$

La quantité δ, qui répond à ces indices, est

$$\delta = 4\lambda^2 - 2(\lambda^2 - p) = 2(\lambda^2 + p).$$

Elle est *paire*. Par suite (n^{os} **42** et **65**), il existe $\frac{1}{2}(\delta + 2)$ fonctions intermédiaires normales, d'indices $2\lambda, 1$, de caractéristique nulle, paires, s'annulant simplement pour les quatre demi-périodes (32′), (34′), (42′), (44′).

A ces fonctions correspond, sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, une famille

de courbes algébriques d'ordre 4λ passant simplement par quatre points doubles : celles d'entre elles, C, qui ont en (11') un point multiple d'ordre 2λ, sont (n° **78**) de genre

$$p_1 = \frac{1}{2}[4\lambda^2 - 2(\lambda^2 - p)] - \lambda^2 = p,$$

et forment un système linéaire p fois infini.

Les projections des courbes C, à partir du point (11'), sur le plan de la figure (F) sont donc des courbes Σ, de degré 2λ, de genre p, formant un système p fois infini, et passant toutes simplement par les quatre points de la figure marqués (32'), (34'), (42'), (44'), points qui sont les sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites de cette figure. Enfin (n^{os} **84** et **112**) les courbes Σ touchent les six droites, en dehors de ces points, partout où elles les rencontrent.

Cet ensemble de propositions constitue la seconde et dernière partie du théorème fondamental qu'il s'agissait d'établir [1].

Démonstration du théorème II.

119. Elle se fait d'une manière toute pareille; les courbes C appartiennent alors à une famille de courbes passant toutes simplement par quatre points doubles de $\mathfrak{K}$, parmi lesquels est le point (11'). Nous n'insisterons pas sur le raisonnement, qu'il suffit de calquer sur le précédent.

120. *Remarque.* — Au n° **114** nous avons supposé implicitement que p n'est pas nul, c'est-à-dire que la courbe Σ n'est pas unicursale. Si $p = 0$, le raisonnement fait pour établir l'identité (8)

$$(8) \qquad N^2 P_1 \ldots P_6 - \theta_0 M^2 \equiv \Sigma Q$$

[1] Les courbes C formant un système linéaire sur $\mathfrak{K}$, les courbes Σ, dans le plan Π, forment un système du second ordre, c'est-à-dire que les paramètres variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ figurent au second ordre dans l'équation générale de ces courbes.

ne s'applique plus, mais il est bien facile de lui en substituer un autre.

L'hypothèse est qu'il existe *une* courbe Σ, de genre zéro, passant par les quatre sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites $P_i = 0$ et touchant ces six droites partout ailleurs.

Pour démontrer l'identité (8), il suffit d'établir qu'en chaque point de Σ, la fonction $P_1 P_2 \ldots P_6$ est le carré d'une fonction rationnelle $\frac{M}{N}$ des coordonnées. Or, supposons les coordonnées homogènes, x, y, z d'un point de Σ, exprimées en fonction rationnelle entière d'un paramètre t, une seule valeur du paramètre répondant à chaque point : tout polynome en t, $\varphi(t)$, sera rationnel en x, y, z. D'ailleurs, en tout point de Σ, $P_1 P_2 \ldots P_6$ est un polynome en t, et ce polynome est un carré parfait, puisque, en vertu des hypothèses géométriques, ses racines sont deux à deux égales : on a donc, en tout point de Σ,

$$P_1 P_2 \ldots P_6 = \varphi^2(t) = \left[\frac{M}{N}(x, y, z)\right]^2,$$

C. Q. F. D.

Cas général d'un invariant Δ impair.

121. Nous énoncerons, sans démonstration, les deux théorèmes fondamentaux qui permettent de former l'équation modulaire; les explications données aux n^{os} **115-120** et celles des n^{os} **92-95** relatives à $\Delta = 5$, permettront de reconstituer les raisonnements sans aucune difficulté.

122. I. *Soit une surface de Kummer $\mathfrak{K}$ jouissant de la propriété suivante :*

Les six droites suivant lesquelles les six plans singuliers passant par un même point double coupent un plan quelconque sont telles qu'il existe un système p fois infini de courbes Σ indécomposables, de genre p et de degré 2λ, dont chacune passe par les sommets d'un triangle formé par trois des six droites, et touche, partout ailleurs, ces six droites en tous les points où elle les rencontre :

1° *La surface $\mathfrak{K}$ est singulière; son invariant Δ est impair et a*

pour maximum

$$\Delta = 8(\lambda^2 - p) + 1; \tag{12}$$

2° *Réciproquement, toute surface de Kummer singulière dont l'invariant est de la forme* (12) *jouit de la propriété géométrique indiquée.*

II. *Soit une surface de Kummer* $\mathfrak{K}$ *jouissant de la propriété suivante :*

Les six droites définies plus haut sont telles qu'il existe un système p fois infini de courbes Σ *de genre p et de degré* 2λ, *dont chacune passe par les cinq sommets d'un pentagone formé par cinq des six droites et touche, partout ailleurs, ces six droites en tous les points où elle les rencontre :*

1° *La surface* $\mathfrak{K}$ *est singulière, son invariant* Δ *est impair et a pour maximum*

$$\Delta = 8(\lambda^2 - p) - 3; \tag{13}$$

2° *Réciproquement, toute surface de Kummer singulière dont l'invariant est de la forme* (13) *jouit de la propriété géométrique indiquée.*

Équations modulaires.

123. Les deux valeurs (12) et (13) de Δ sont respectivement des formes $8N + 1$ et $8N + 5$, qui sont les deux formes que peut prendre un invariant impair $4P + 1$; on en conclut, comme aux n^os **107-109**, qu'on pourra théoriquement former de proche en proche l'équation modulaire qui répond à un invariant impair quelconque.

Propriétés modulaires générales.

124. Les théorèmes qui nous ont servi à former les équations modulaires sont des cas particuliers d'une proposition plus étendue.

qu'on peut employer au même but et qui permet de simplifier souvent, en pratique, les calculs indiqués précédemment.

125. Reprenons le plan de la figure (F), et supposons qu'il existe dans ce plan des courbes Σ, de degré d, de genre p, formant un système p fois infini, et jouissant des propriétés suivantes :

1° Elles passent simplement, ou avec des ordres impairs de multiplicité, $2q_1+1$, $2q_2+1$, ... par n des quinze points de rencontre des six droites de la figure deux à deux : pour mettre en évidence la parité de n, nous écrirons $n = 2\nu + \eta$, η étant 0 ou 1 ;

2° Elles passent, avec des ordres de multiplicité pairs, $2r_1$, $2r_2$, ... par d'autres de ces quinze points : tous ces points multiples, aussi bien que les précédents, étant à branches distinctes ;

3° En dehors de ces points multiples fixes, elles n'ont que des points doubles ordinaires, dont aucun, pour la courbe Σ générale, n'est sur la conique que touchent les six droites [1] ;

4° Elles touchent les six droites en tous les points où elles les rencontrent, les points communs à deux des droites exceptés.

126. On démontre, comme au n° **114**, que le cône qui a pour sommet (11') et pour base une courbe Σ quelconque, coupe la surface de Kummer $\mathfrak{K}$ suivant deux courbes distinctes C et C'. Il est clair que les courbes C et C' sont de genre p, et admettent chacune pour points multiples d'ordres respectifs

$$2q_1+1, \quad 2q_2+1, \quad \ldots; \quad 2r_1, \quad 2r_2, \quad \ldots,$$

les points doubles de $\mathfrak{K}$ qui ont pour projections les points multiples fixes des courbes Σ : ces points multiples de l'espace sont, pour C et C', à branches distinctes.

Les courbes C et C' passent ainsi, avec des ordres impairs de multiplicité, par $2\nu + \eta$ points doubles de $\mathfrak{K}$, et peut-être aussi par le

[1] Ces restrictions ne figuraient pas dans les énoncés des théorèmes fondamentaux, qui sont absolument généraux et conduisent dès lors, sans obstacle possible, aux équations modulaires. C'est pour cette raison que nous avons établi séparément ces théorèmes.

point (11′). Si $\eta = 0$, (11′) est un point d'ordre pair; si $\eta = 1$, d'ordre impair, car, d'après les nos **58-66**, le nombre total des points doubles de $\mathfrak{K}$, par lesquels passe une courbe algébrique avec des ordres impairs, est pair : dans tous les cas, on peut donc dire que (11′) est, sur les courbes C (ou C′), un point multiple d'ordre $2m + \eta$, et que ces courbes ont des points d'ordre impair en $2(\nu + \eta)$ points doubles de $\mathfrak{K}$. Ces $2(\nu + \eta)$ points forment nécessairement un des groupes de quatre, six, huit, dix, douze ou seize points rencontrés aux nos **58-66**, et l'on reconnaît de suite, en se reportant à la figure (F) et la notation des points doubles, si ce groupe répond à une valeur paire ou impaire de l'indice k.

Ainsi, la seule configuration des points fixes d'ordre impair des courbes Σ donne la parité de l'indice k qui correspond aux courbes C (ou C′), et cette configuration n'est pas arbitraire.

Je dis maintenant que le point (11′) est multiple *à branches distinctes* sur C et C′ : il suffit évidemment d'établir que le cône de sommet (11′) et de base Σ coupe, suivant des génératrices distinctes, le cône des tangentes de $\mathfrak{K}$ au point (11′), ou, ce qui revient au même, que la conique touchée par les six droites de la figure (F) ne passe par aucun point multiple de Σ et ne touche pas Σ.

Or, par hypothèse, la courbe générale Σ n'a aucun point multiple sur la conique; tout revient à démontrer que les courbes Σ ne touchent pas *toutes* la conique.

S'il en était ainsi, les courbes $\frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_i} = 0$ (en gardant les notations du no **114**) passeraient par les points de contact de la conique et de la courbe Σ de paramètres ρ_i : les courbes

$$\theta_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_1} + \theta_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_2} + \ldots + \theta_p \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_p} = 0$$

couperaient alors Σ en moins de $2(p-1)$ points mobiles, ce qui est impossible, car il n'y a pas, sur une courbe de genre p, de système de groupes de moins de $2(p-1)$ points ayant une multiplicité égale à $p-1$.

Enfin, comme points multiples mobiles, les courbes C ne peuvent avoir que des points doubles répondant aux points doubles de leur

projection Σ; mais il n'est pas nécessaire évidemment qu'à un point double de Σ corresponde un point double de C. Si donc p' est le nombre des points doubles mobiles des courbes C, p' sera au plus égal au nombre des points doubles mobiles des Σ.

127. Cela posé, soit

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0$$

la relation singulière qui répond à la surface $\mathfrak{K}$: si celle-ci est ordinaire, α, β, γ sont nuls, mais les formules qui vont suivre s'appliquent toujours. Représentons par (l, k) les indices des courbes C, la parité de k étant connue par ce qui précède, et écrivons les formules relatives au degré et au genre de C. On a (nos **50** et **75**)

$$(14) \qquad 2l + \beta k = d + 2m + \eta,$$

$$(15) \qquad \begin{cases} p = \frac{1}{2}(l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 - \nu - \eta + 2) \\ \qquad - \Sigma q(q+1) - \Sigma r^2 - m(m+\eta) - p', \end{cases}$$

en se souvenant qu'on a désigné par $2m + \eta$ l'ordre de multiplicité du point $(11')$.

L'équation qui donne le genre (n° **75**) est applicable ici sans modification, tous les points multiples de C étant à branches distinctes. En éliminant m entre (14) et (15), et posant toujours

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = \Delta,$$

on trouve

$$(16) \qquad \begin{cases} \Delta k^2 = 2d^2 + 2(\eta - 1)^2 - 4\nu + 6 \\ \qquad - 8[p + p' + \Sigma q(q+1) + \Sigma r^2] - (2l + \beta k - 2d)^2, \end{cases}$$

ou, en introduisant le nombre $n = 2\nu + \eta$, et observant que η est 0 ou 1,

$$(17) \qquad \Delta = \frac{2d^2 - 2n - 8[p + p' - 1 + \Sigma q(q+1) + \Sigma r^2] - (2l + \beta k - 2d)^2}{k^2}.$$

Cette expression de l'invariant Δ contient, outre p', deux entiers

indéterminés, k et l, ou mieux k et $2l+\beta k-2d$, qui figurent tous deux au carré et dont la parité est connue : celle de k l'est par une remarque précédente ; celle de $2l+\beta k-2d$, par l'équation (14), est la même que celle de $d+\eta$.

Observons que si k est impair et, par suite, sûrement différent de zéro, les courbes C sont singulières, ainsi que la surface $\mathfrak{K}$; pour que celle-ci puisse être ordinaire, il faut que l'équation (17) soit satisfaite pour $k=0$, c'est-à-dire qu'on puisse déterminer l et p' de manière à annuler le numérateur de Δ.

128. *Réciproquement,* supposons qu'on puisse trouver des entiers k, l et p' tels que la valeur (17) de Δ soit positive, entière, de l'une des formes $4N$ ou $4N+1$; bien entendu, k, l et p' sont soumis aux conditions de parité ou de limitation qu'on a indiquées plus haut. Nous allons montrer que, la figure (F) étant supposée dépendre d'une surface de Kummer singulière d'invariant Δ, il existe, dans le plan de cette figure, des courbes Σ vérifiant les conditions énoncées au n° **125**.

129. Pour simplifier, nous donnerons la démonstration dans un cas particulier, qui correspond à celui du premier théorème fondamental ci-dessus, c'est-à-dire que nous supposerons $\eta=0$, $q_i=0$, $r_i=0$, $\nu=2$ et $d=2\lambda$. Il s'agit alors d'établir l'existence, dans le plan de la figure (F), de courbes Σ, de degré 2λ, de genre et de multiplicité p, passant simplement par les sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites et touchant ces six droites partout ailleurs : l'hypothèse est que Δ est défini par

$$\Delta=\frac{8\lambda^2-8p-8p'-4\omega^2}{k^2}, \tag{18}$$

car le nombre $2l+\beta k-2d$ de la formule (17) est de même parité que $d+\eta$, ici 2λ; on peut donc le désigner par 2ω.

Quant au nombre k, il est impair, car le groupe des quatre points par lesquels passent simplement les courbes Σ correspond à un indice k impair. Dès lors, en vertu de (18), Δ est de la forme $4N$, et la relation singulière correspondante peut être supposée du type

$$-\tfrac{1}{4}\Delta g+g'=0.$$

Considérons alors les fonctions intermédiaires normales, de caractéristique nulle, paires, et d'indices (l, k), l étant donné par

$$2l - 4\lambda = 2\omega \qquad \text{ou} \qquad l = 2\lambda + \omega;$$

ces indices sont admissibles, car on voit de suite que $2l \gtrless \sqrt{\Delta} \bmod k$. La quantité δ qui leur correspond est

$$(19) \qquad \delta = 2(\lambda + \omega)^2 + 2p + 2p';$$

elle est paire, de sorte que les fonctions normales considérées sont au nombre de $\frac{\delta + 2}{2}$, linéairement distinctes, et s'annulent pour les quatre demi-périodes $(32')$, $(34')$, $(42')$, $(44')$.

A ces fonctions correspond, sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, une famille de courbes d'ordre $2l$ ou $4\lambda + 2\omega$, $\frac{\delta}{2}$ fois infinie, passant par les quatre points doubles dont on vient d'écrire les symboles. Parmi ces courbes, considérons celles, C, qui ont en $(11')$ un point multiple d'ordre $2(\lambda + \omega)$ et qui possèdent en outre p' points doubles variables de l'une à l'autre.

Les courbes C dépendent dès lors de

$$\frac{\delta}{2} - (\lambda + \omega)^2 - p',$$

ou, d'après (19), de p paramètres *au moins*, leur genre est *au plus* celui que donne la formule générale du n° **75**, car les conditions imposées peuvent entraîner d'autres singularités qui, nécessairement, diminuent le genre. En désignant ce genre par p_1 on a ainsi :

$$p_1 \leqq \frac{\delta}{2} - (\lambda + \omega)^2 - p',$$

c'est-à-dire

$$p_1 \leqq p.$$

Les projections des courbes C sur le plan de la figure (F) sont des courbes Σ, d'ordre $4\lambda + 2\omega - 2(\lambda + \omega)$ ou 2λ, de genre p_1, formant un système p_2 fois infini $(p_2 \geqq p)$, passant par les points $(32')$, $(34')$,

$(42')$, $(44')$ de la figure, et touchant partout ailleurs les six droites; tout revient à démontrer que $p_1 = p_2 = p$, ou, en vertu des inégalités qui précèdent, que p_2 ne peut être supérieur à p_1.

Or, si $\rho_1, \rho_2, \ldots$ sont les p_2 paramètres dont dépend l'équation générale $\Sigma = 0$ des courbes Σ, le système linéaire

$$\theta_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_1} + \theta_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_2} + \ldots = 0,$$

découpe (n° **114**), sur la courbe Σ de paramètres ρ_i, un système de groupes de $2(p_1 - 1)$ points mobiles et de multiplicité $p_2 - 1$. Comme sur une courbe de genre p_1 il n'y a pas de système de groupes de $2(p_1 - 1)$ points, plus de $p_1 - 1$ fois infini, il faut nécessairement que p_2 soit au plus égal à p_1. C. Q. F. D.

150. Une démonstration semblable s'applique au cas général, et aussi au cas particulier où k et le numérateur de Δ dans (17) sont nuls : la surface $\mathfrak{K}$ est alors une surface non singulière.

Applications.

151. I. Si l'on forme, par la méthode du n° **108**, l'équation modulaire pour $\Delta = 8N$, en posant $N = \lambda^2 - p$, la formule (18) et la théorie précédente montrent qu'on obtiendra en même temps les équations modulaires pour les invariants

$$\Delta' = \frac{8N - 8p' - 4\omega^2}{k^2},$$

k étant un entier impair, ω un entier quelconque, p' un entier au plus égal au nombre des points doubles d'une courbe Σ, d'ordre 2λ et de genre p, c'est-à-dire

$$p' \leqq 2\lambda^2 - 3\lambda + 1 - p.$$

On connaît ainsi les facteurs étrangers dont il faut débarrasser l'équation modulaire. Cette remarque s'applique aux autres cas,

$$\Delta = 8N + 4, \quad 8N + 1 \quad \text{ou} \quad 8N + 5.$$

132. II. Δ étant donné de la forme $8N$, par exemple, posons

$$8N = 8\lambda^2 - 8\Sigma r^2 \qquad \text{ou} \qquad N = \lambda^2 - \Sigma r^2,$$

ce qui est toujours possible, car il suffit de prendre pour λ le plus petit entier dont le carré atteigne ou surpasse N, et d'exprimer la différence $\lambda^2 - N$ par une somme de quatre carrés r_1, r_2, r_3, r_4. Alors, en exprimant qu'il existe, dans le plan de la figure (F), une courbe unicursale Σ, d'ordre 2λ, passant par les sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites, ayant des points d'ordre $2r_1$, $2r_2$, $2r_3$, $2r_4$ en quatre autres des points de concours des six droites deux à deux et touchant ces droites partout ailleurs, on obtient le produit des équations modulaires pour les invariants compris dans la formule

$$\Delta = \frac{8\lambda^2 - 8p' - 8\Sigma r^2 - 4\omega^2}{k^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{8N - 8p' - 4\omega^2}{k^2},$$

k étant un entier impair, ω un entier quelconque, p' un entier au plus égal à

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 - \Sigma r(r-1).$$

On voit qu'on peut obtenir ainsi les équations modulaires pour les invariants $8N$ en prenant pour Σ *une courbe unicursale,* ce qui simplifie notablement les calculs.

La même remarque s'applique aux invariants

$$8N+4, \quad 8N+1, \quad 8N+5.$$

133. III. Il est clair enfin que la théorie générale précédente donne, pour former les équations modulaires de proche en proche, d'autres procédés que ceux qui dérivent des théorèmes fondamentaux : dans chaque cas particulier, on aura à choisir le plus avantageux.

Cas particuliers et exemples.

134. Dans le cas de l'invariant $\Delta = 12$, les propositions générales donnent les énoncés suivants :

Lorsque les six droites de la figure (F) *peuvent se répartir en trois couples* A *et* A′, B *et* B′, C *et* C′, *de telle sorte qu'il existe un système simplement infini de cubiques passant par les sommets des trois couples et touchant en outre les six droites, la surface de Kummer correspondante est singulière et répond à l'invariant* 12 *ou à l'invariant* 8, *et réciproquement.*

Comme on sait caractériser autrement la figure (F) qui répond à l'invariant 8, ce théorème donne la propriété modulaire caractéristique pour l'invariant 12.

On pourrait voir que dans le cas de $\Delta = 12$, il n'y a qu'*un* système de cubiques satisfaisant aux conditions de l'énoncé; dans le cas de $\Delta = 8$, il y en a *deux :* cela tient à ce que, dans les calculs du n° **129**, on peut donner à ω le signe $\pm$, mais ω étant nul pour $\Delta = 12$, le double signe n'introduit aucune différence.

De même :

Lorsque les six droites de la figure (F) *peuvent se répartir en trois couples* A, A′; B, B′; C, C′, *de telle sorte qu'il existe une cubique passant par les sommets des trois couples, ayant un point double au point d'intersection de* A *et de* B, *et touchant en outre les droites* A′, B′, C, C′, *la surface de Kummer correspondante est singulière, et répond à l'invariant* 12 *ou à l'invariant* 8.

133. Voici d'autres exemples :

Lorsque les six droites de la figure (F) *peuvent se répartir en trois couples* A, A′; B, B′; C, C′, *de telle sorte qu'il existe une quartique unicursale passant par les* 12 *points d'intersection des trois couples deux à deux, la surface de Kummer correspondante est singulière et répond à l'un des invariants* 16, 12, 8, 4, *et réciproquement.*

Lorsque les six droites forment un hexagone auquel on peut inscrire et circonscrire un système p fois infini de quartiques de genre p ($p = 0$, 1, 2, ou 3), *la surface de Kummer correspondante est singulière et répond à l'invariant* $28 - 8p$, *ainsi qu'à tous les invariants pairs inférieurs, et réciproquement.*

Terminons par un exemple qui convient à une surface non singulière :

Étant données six droites tangentes à une même conique, il existe une infinité simple de cubiques planes passant par les six sommets du quadrilatère complet formé par quatre quelconques de ces droites, passant par le point de rencontre des deux autres et touchant en outre chacune de celles-ci.

Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux systèmes d'équations du premier ordre en involution;

PAR M. JULES BEUDON,
Professeur au lycée d'Alger.

L'objet de ce Travail est l'étude des systèmes S d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque définissant une fonction z des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et dont la solution générale dépend d'une fonction arbitraire de ρ arguments et de constantes arbitraires en nombre fini.

Je démontre tout d'abord qu'on peut donner aux équations qui définissent les systèmes S une forme normale mettant en évidence l'existence de multiplicités caractéristiques dépendant d'un nombre fini de paramètres.

J'indique ensuite les opérations à effectuer pour arriver à l'intégration complète.

Je considère enfin les systèmes linéaires et du second ordre, et j'étudie les conditions d'intégrabilité; je n'envisage que les résultats pouvant être énoncés simplement.

1. A cause de la définition du système S d'ordre p, les équations qui le composent permettent d'évaluer toutes les dérivées d'ordre p où les dérivations ont été faites par rapport à quelques-unes des lettres $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$ en fonction de celles où l'on n'a fait varier que $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$, et des dérivées d'ordre inférieur à p.

Si l'on envisage, d'autre part, toutes les dérivées d'ordre $p-1$ de z, et si l'on ajoute successivement dans toutes ces dérivées l'unité aux

indices relatifs aux $x_k (k = \rho + 1, \ldots, n)$, on obtient toutes les dérivées d'ordre p, où l'on a fait varier quelques-unes des lettres $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$.

On peut donc mettre les équations du système S sous la forme

$Z^p_{\alpha_1, \ldots, \alpha_h+1, \ldots \alpha_n} =$ fonction des dérivées d'ordre p prises par rapport à $(h > \rho)$ $x_1, \ldots, x_\rho$ et des dérivées d'ordre inférieur.

En différentiant une fois toutes les équations du système S par rapport aux variables indépendantes, on est conduit à un nouveau système répondant à la même définition, mais dont les équations sont linéaires par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé ; je ne m'occuperai donc que des systèmes linéaires.

2. On a tout d'abord le théorème suivant [1] :

Si un système d'équations aux dérivées partielles définissant une fonction z de n variables $x_1, \ldots, x_n$, a une solution générale dépendant d'une fonction arbitraire de ρ arguments, et si l'on a pris soin de le rendre linéaire par une différenciation, les équations qui le définissent peuvent être mises sous la forme suivante :

$$Z^p_{\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho, \ldots, \alpha_h+1, \ldots, \alpha_n} = a^h_1 Z^p_{\alpha_1+1, \ldots, \alpha_n} + a^h_2 Z^p_{\alpha_1, \alpha_2+1, \ldots, \alpha_n} + \ldots$$
$$+ a^h_\rho Z^p_{\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho+1, \ldots, \alpha_n} + A^h_{\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho, \ldots, \alpha_n},$$
$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = p - 1),$$

où l'on a posé

$$Z^k_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} = \frac{\partial^k z}{\partial x_1^{\lambda_1}, \ldots, \partial x_n^{\lambda_n}}.$$

Considérons, en premier lieu, les équations

$$(1) \qquad \frac{\partial^p z}{\partial x_i^{p-1} \partial x_k} = \ldots$$
$$(2) \qquad \frac{\partial^p z}{\partial x_j^{p-1} \partial x_k} = \ldots$$
$$\left. \right\} \quad i, j \geqq \rho, \quad k > \rho ;$$

[1] *Comptes rendus*, 31 janvier 1898.

en différentiant la première $p-1$ fois par rapport à x_j, et la seconde $p-1$ fois par rapport à x_i, on aura deux expressions de

$$\frac{\partial^{2p-1} z}{\partial x_i^{p-1}\,\partial x_j^{p-1}\,\partial x_k}$$

qui devront être identiques.

Par suite, l'équation (1) ne doit contenir que des dérivées d'ordre p où l'indice relatif à x_j est au moins égal à $p-1$; de même, l'équation (2) ne contiendra que des dérivées d'ordre p où l'indice relatif à x_i est au moins égal à $p-1$; on a donc

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_i^{p-1}\,\partial x_k} = a_1^k \frac{\partial^p z}{\partial x_1\,\partial x_i^{p-1}} + \ldots + a_\rho^k \frac{\partial^p z}{\partial x_\rho\,\partial x_i^{p-1}} + \ldots,$$

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_j^{p-1}\,\partial x_k} = \alpha_1^k \frac{\partial^p z}{\partial x_1\,\partial x_j^{p-1}} + \ldots + \alpha_\rho^k \frac{\partial^p z}{\partial x_\rho\,\partial x_j^{p-1}} + \ldots,$$

en achevant l'identification, on voit de suite que

$$a_1^k = \alpha_1^k, \qquad a_2^k = \alpha_2^k, \qquad \ldots, \qquad a_\rho^k = \alpha_\rho^k,$$

et, en opérant de proche en proche, on obtient

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_\rho^{\alpha_\rho}, \partial x_k} = a_1^k \frac{\partial^p z}{\partial x_1^{\alpha_1+1}, \ldots, \partial x_\rho^{\alpha_\rho}} + \ldots + a_\rho^k \frac{\partial^p z}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_\rho^{\alpha_\rho+1}} + \ldots$$

Supposons la proposition établie pour toutes les équations où la somme $\alpha_{\rho+1} + \ldots + \alpha_n$ est inférieure ou égale à un nombre N, nous allons montrer qu'elle est vraie pour

$$\alpha_{\rho+1} + \ldots + \alpha_n = N + 1.$$

D'abord, étant donnée une dérivée d'ordre p, on peut l'exprimer linéairement en fonction des dérivées d'ordre p où la somme

$$\alpha_{\rho+1} + \ldots + \alpha_n$$

est inférieure à la valeur correspondante de la dérivée choisie.

Considérons alors les deux équations

$$(3)\quad Z^p_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho,\ldots,\alpha_h+1,\ldots,\alpha_n} = a_1^h Z^p_{\alpha_1+1,\ldots,\alpha_n} + \ldots + a_\rho^h Z^p_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho+1,\ldots,\alpha_n} + \ldots,$$
$$\alpha_{\rho+1} + \ldots + \alpha_n = \mathrm{N} - 1$$

et

$$(4)\quad Z^p_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i-1,\ldots,\alpha_h+1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_n} = \text{fonction des dérivées d'ordre } p,$$

où $\alpha_{\rho+1} + \ldots + \alpha_n \leq \mathrm{N} - 1$.

Pour écrire les conditions d'intégrabilité, il faut différentier l'équation (3) par rapport à x_k et l'équation (4) par rapport à x_i; or l'équation (3) donne, pour les dérivées d'ordre $p+1$, l'expression

$$a_1^h Z^p_{\alpha_1+1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_n} + \ldots + a_\rho^h Z^p_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho+1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_n};$$

donc l'équation (4) est nécessairement de la forme

$$Z^p_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i-1,\ldots,\alpha_h+1,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_n} = a_1^h Z^p_{\alpha_1+1,\ldots,\alpha_i-1,\ldots,\alpha_h,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_n} + \ldots$$
$$+ a_\rho^h Z^p_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i-1,\ldots,\alpha_\rho+1,\ldots,\alpha_h,\ldots,\alpha_k+1,\ldots,\alpha_n} + \ldots,$$

et la proposition est établie.

Remarque. — L'équation qui donne la valeur de la dérivée

$$Z^p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$$

peut, en général, prendre $n-\rho$ formes différentes, car on peut écrire cette dérivée

$$Z^p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\rho,\ldots,\lambda_h-1+1,\ldots,\lambda_n},$$
$$h = \rho+1, \ldots, n;$$

mais toutes ces formes sont équivalentes quand on exprime toutes les dérivées en fonction de celles où $x_1, \ldots, x_\rho$ seulement ont varié.

5. Le système S étant mis sous la forme normale, on peut grouper quelques-unes de ses équations de manière à mettre en évidence des multiplicités caractéristiques à une dimension.

Considérons, en effet, l'équation

$$(5)\quad \begin{cases} Z^{p}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho,\ldots,\alpha_h+1,\ldots,\alpha_n} = a^h_1 Z^{p}_{\alpha_1+1,\ldots,\alpha_\rho,\ldots,\alpha_n} + \ldots \\ \qquad + a^h_\rho Z^{p}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho+1,\ldots,\alpha_n} + A^h_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}, \end{cases}$$

et toutes celles que l'on obtient en faisant varier les indices de manière que

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = p - 1.$$

Envisageons, d'autre part, une multiplicité intégrale à n dimensions du système S; les équations différentielles suivantes :

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_h} = -a^h_1, \qquad \dfrac{dx_2}{dx_h} = -a^h_2, \qquad \ldots, \qquad \dfrac{dx_\rho}{dx_h} = -a^h_\rho, \\ \qquad\qquad \dfrac{dx_k}{dx_h} = 0 \qquad \begin{cases} k > \rho, \\ k \neq h \end{cases} \end{cases}$$

définissent sur cette multiplicité une famille de courbes; on a de plus, le long de ces courbes,

$$(7)\quad \begin{gathered} \frac{dZ^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}}{dx_h} = -a^h_1 Z^{k+1}_{\lambda_1+1,\ldots,\lambda_n} - \ldots - a^h_\rho Z^{k+1}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\rho+1,\ldots,\lambda_n}, \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = k < p - 1, \end{gathered}$$

et les équations (5) donnent

$$(8)\quad \frac{dZ^{p-1}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}}{dx_h} = A^h_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}.$$

L'ensemble des équations (6), (7), (8) définit une orientation d'éléments unis d'ordre $p - 1$ le long d'une famille de courbes, et cela indépendamment de la multiplicité intégrale choisie. D'autre part, à cause du degré de généralité des intégrales du système S, on pourra toujours en faire passer une par un élément d'ordre $p - 1$ arbitrairement choisi; les équations précédentes définissent une famille de caractéristiques à une dimension; en faisant varier h de $\rho + 1$ à n, on obtient ainsi $n - \rho$ familles de caractéristiques à une dimension; et en

les associant à la manière des caractéristiques des équations du premier ordre [1], on obtiendra des caractéristiques à $n - \rho$ dimensions.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si le système S *est complètement intégrable, le système*

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_h} = - a_i^h, \qquad \frac{\partial Z^{p-1}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}}{\partial x_h} = A^h_{\alpha_1, \dots, \alpha_n},$$

$$\frac{\partial Z^k_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}}{\partial x_h} = - a_1^h Z^{k+1}_{\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_n} - \dots - a_\rho^h Z^{k+1}_{\lambda_1, \dots, \lambda_\rho + 1, \dots, \lambda_n},$$

$$i = 1, 2, \dots, \rho, \qquad h = \rho + 1, \dots, n$$

l'est aussi et définit les caractéristiques d'ordre $p - 1$ *et à* $n - \rho$ *dimensions du système* S.

4. Avant d'aller plus loin, comptons le nombre des équations *distinctes* du système S. Si le premier membre d'une équation est une dérivée d'ordre p telle que la somme des indices des lettres $x_{\rho+1}, \dots, x_n$ est $p - h$, la somme des indices des lettres $x_1, \dots, x_\rho$ est h; pour obtenir tous les premiers membres, il faudra, d'après la définition, prendre toutes les dérivées d'ordre $p - h$ de z par rapport à $x_{\rho+1}, \dots, x_n$ et les différentier h fois par rapport à $x_1, \dots, x_\rho$, ce qui donne $\Gamma_n^{p-h}\Gamma_\rho^h$ équations, et faire varier h de 0 à $p - 1$, ce qui donne en tout

$$\Gamma^p_{n-\rho} + \Gamma^{p-1}_{n-\rho}\Gamma^1_\rho + \dots + \Gamma^{p-h}_{n-\rho}\Gamma^h_\rho + \dots + \Gamma^1_{n-\rho}\Gamma^{p-1}_\rho$$

équations.

Le degré de généralité du système S est représenté par une fonction arbitraire de ρ arguments; d'une façon plus précise, si l'on se donne une multiplicité ponctuelle à ρ dimensions, il y a une infinité d'intégrales contenant cette multiplicité, dont l'ensemble dépend d'un nombre fini de paramètres.

On peut définir cette multiplicité ponctuelle à ρ dimensions en se donnant z, $x_{\rho+1}, \dots, x_n$ en fonction de $x_1, \dots, x_\rho$; il s'agit de déter-

---

(1) *Voir* aussi J. BEUDON, *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, etc.* (*Annales de l'École Normale,* Supplément 1896, p. 44).

miner sur cette multiplicité une orientation d'éléments d'ordre p unis vérifiant les équations du système S.

On aura

$$\frac{\partial Z^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}}{\partial x_i} = \sum_{h=\rho+1}^{n} Z^{k+1}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_h+1,\ldots,\lambda_n} \frac{\partial x_h}{\partial x_i} + Z^{k+1}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_i+1,\ldots,\lambda_n}$$

$$i = 1, 2, \ldots, \rho, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, p-1, \qquad \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = k.$$

Ces équations permettent de calculer les $Z^{k+1}, \ldots$ en fonction des $Z^{k+1}_{0,\ldots,0,\lambda_{\rho+1},\ldots,\lambda_n}$ et des dérivées des $Z^h \ldots$, où l'indice h est inférieur à $k+1$.

Si l'on remplace dans les équations du système S, il ne restera plus que :

1° Les

$$Z^p_{0,\ldots,0,\lambda_{\rho+1},\ldots,\lambda_n};$$

2° Les

$Z^{p-1}_{0,\ldots,0,\lambda_{\rho+1},\ldots,\lambda_n}$ et leurs dérivées du 1[er] ordre,

3° Les

$Z^{p-2}_{0,\ldots,0,\lambda_{\rho+1},\ldots,\lambda_n}$ et leurs dérivées du 1[er] et 2[e] ordre,

. . . . ;

$(h+1)$° Les

$Z^{p-h}_{0,\ldots,0,\lambda_{\rho+1},\ldots,\lambda_n}$ et leurs dérivées du 1[er], 2[e], ..., h[e] ordre,

. . . . ;

p° Les

$Z^1_{0,\ldots,0,\lambda_{\rho+1},\ldots,\lambda_n}$ et leurs dérivées du 1[er], 2[e], ..., $p-1$[e] ordre.

Le nombre de l'ensemble des dérivées d'ordre supérieur de chacune des fonctions inconnues (avec l'ordre qui lui est attaché) est égal à

$$\Gamma^p_{n-\rho} + \Gamma^{p-1}_{n-\rho}\Gamma^1_\rho + \ldots + \Gamma^1_{n-\rho}\Gamma^{p-1}_\rho;$$

il est précisément égal au nombre des équations du système S : on peut donc obtenir ces fonctions inconnues par l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

L'intégration donnera des formules de la forme

$$(Z^k_{\lambda_1,\dots,\lambda_n})_0 = \text{fonction de } x_1^0, \dots, x_\rho^0, C_1, C_2, \dots.$$

D'autre part, en intégrant les équations des caractéristiques, on aura

$$z = \text{fonction de } x_{\rho+1}, \dots, x_n, x_1^0, \dots, x_n^0, z^0, \dots, (z^k_{\lambda_1,\dots,\lambda_n})_0, \dots,$$
$$x_i = \text{fonction de } x_{\rho+1}, \dots, x_n, x_1^0, \dots, x_n^0, z^0, \dots, (z^k_{\lambda_1,\dots,\lambda_n})_0, \dots,$$
$$i = 1, 2, \dots, \rho,$$

ou, en remplaçant

$$z = \text{fonction de } x_{\rho+1}, \dots, x_n, x_1^0, \dots, x_\rho^0, C_1, C_2, \dots,$$
$$x_i = \text{fonction de } x_{\rho+1}, \dots, x_n, x_1^0, \dots, x_\rho^0, C_1, C_2, \dots,$$
$$i = 1, 2, \dots, \rho.$$

En éliminant $x_1^0, \dots, x_\rho^0$ entre ces $\rho + 1$ équations, on a l'ensemble des multiplicités intégrales qui passent par la multiplicité ponctuelle choisie.

On pourrait donner du résultat qui précède une démonstration purement analytique; je ne le ferai pas ici, pour éviter des longueurs, et je me contenterai de dire que la marche à suivre a été indiquée dans ma Thèse pour des systèmes analogues (¹).

5. Nous allons étudier maintenant les systèmes linéaires et du deuxième ordre. Les équations d'un tel système peuvent être mises sous la forme

$$p_{ih} = a_1^h p_{i1} + a_2^h p_{i2} + \dots + a_\rho^h p_{i\rho} + A_{ih},$$
$$p_{hk} = \sum_{i=1}^{\rho} a_i^h a_i^k p_{ii} + \sum_{i,j=1}^{\rho} (a_i^h a_j^k + a_j^h a_i^k) p_{ij} + A_{hk},$$
$$i = 1, 2, \dots, \rho, \qquad h, k > \rho,$$

(¹) *Loc cit.*, p. 23.

et provenant de la forme normale où l'on a exprimé les seconds membres en fonction des dérivées prises par rapport à $x_1, \ldots, x_\rho$.

Pour écrire les conditions d'intégrabilité, il faut différentier ces équations et identifier les dérivées du troisième ordre obtenues.

Nous avons vu déjà que, dans les seconds membres, les parties contenant les dérivées du troisième ordre étaient identiques; il n'y a plus qu'à identifier les expressions renfermant des dérivées du deuxième et du premier ordre.

Nous ne ferons le calcul que pour les expressions quadratiques par rapport aux dérivées du second ordre; dans tout ce qui suit, nous négligerons les termes pouvant fournir des expressions de degré 0 ou 1 par rapport à ces dérivées; nous pouvons donc faire en particulier les A nuls.

Soit une fonction Φ de $p_1, \ldots, p_n$, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_{\sigma=1}^{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial p_\sigma} p_{\sigma i} + \sum_{h=\sigma+1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_h} \sum_{\sigma=1}^{\rho} a_\sigma^h p_{\sigma i} \right),$$

si nous posons

$$\Lambda_\sigma f = \frac{\partial f}{\partial p_\sigma} + \sum_{h=\rho+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_h} a_\sigma^h \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, \rho,$$

nous aurons

$$(9) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_{\sigma=1}^{\rho} p_{\sigma i} \Lambda_\sigma \Phi.$$

De même

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_h} = \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} p_{jh} + \sum_{k=\rho+1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} p_{kh},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_h} = & \sum_{j=1}^{\rho} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \sum_{i=1}^{\rho} a_i^h p_{ji} \right) \\ & + \sum_{k=\rho+1}^{n} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} \left[\sum_{i=1}^{\rho} a_i^h a_i^k p_{ii} + \sum_{ij=1}^{\rho} (a_i^h a_j^k + a_j^h a_i^k) p_{ij} \right] \right\}, \end{aligned}$$

ou enfin

$$(10) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_h} = \sum_{\tau=1}^{\rho} \left(\Lambda_\tau \Phi \sum_{\sigma}^{\rho} a_\sigma^h p_{\sigma\tau} \right) = \sum_{1=\sigma}^{\rho} \left(\Lambda_\sigma \Phi \sum_{\tau=1}^{\rho} a_\tau^h p_{\sigma\tau} \right).$$

Envisageons les deux équations

$$p_{ih} = \sum_{\sigma=1}^{\rho} a_\sigma^h p_{\sigma i},$$

$$p_{jh} = \sum_{\tau=1}^{\rho} a_\tau^h p_{\tau j},$$

elles donnent deux expressions identiques de P_{ijh}; on devra donc avoir, en particulier, en tenant compte de (9) et (10)

$$\sum_{\sigma=1}^{\rho}\left[p_{\sigma i}\sum_{\tau=1}^{\rho} p_{\tau j}\Lambda_\tau(a_\sigma^h)\right] = \sum_{\tau=1}^{\rho}\left[p_{\tau j}\sum_{\sigma=1}^{\rho} p_{\sigma i}\Lambda_\sigma(a_\tau^h)\right],$$

ce qui exige que

(11) $$\Lambda_\tau(a_\sigma^h) = \Lambda_\sigma(a_\tau^h),$$
$$\tau, \sigma = 1, 2, \ldots, \rho, \qquad h = \rho+1, \ldots, n.$$

Prenons de même les deux équations

$$p_{hk} = \sum_{i=1}^{\rho} a_i^h a_i^k p_{ii} + \sum_{ij=1}^{\rho}(a_i^h a_j^k + a_j^h a_i^k) p_{ij}$$

et

$$p_{\lambda k} = \sum_{\mu=1}^{\rho} a_\mu^k p_{\lambda\mu},$$

elles donnent

$$\sum_{\lambda=1}^{\rho}\left[p_{\lambda\mu}\sum_{ij=1}^{\rho} a_j^h p_{ij}\Lambda_i(a_\mu^k)\right] = \sum_{i=1}^{\rho}\left[a_i^k\sum_{\mu} p_{\lambda\mu}\Lambda_\mu(a_i^h) + a_i^h\sum_{\mu=1}^{\rho} p_{\lambda\mu}\Lambda_\mu(a_i^k)\right]p_{ii}$$
$$+\sum_{ij=1}^{\rho} p_{ij}\left\{\begin{array}{l} a_i^h\sum_{\mu=1}^{\rho} p_{\lambda\mu}\Lambda_\mu(a_j^h) + a_j^k\sum_{\mu=1}^{\rho} p_{\lambda\mu}\Lambda_\mu(a_i^h) \\ + a_j^h\sum_{\mu=1}^{\rho} p_{\lambda\mu}\Lambda_\mu(a_i^k) + a_i^k\sum_{\mu} p_{\lambda\mu}\Lambda_\mu(a_j^h)\end{array}\right\},$$

en identifiant les coefficients de $p_{\lambda\lambda}^2$ on obtient

$$a_\lambda^h A_\lambda(a_\lambda^k) = a_\lambda^h A_\lambda(a_\lambda^k) + a_\lambda^k A_\lambda(a_\lambda^h),$$

c'est-à-dire

$$A_\lambda(a_\lambda^h) = 0,$$

car nous supposons tous les a différents de zéro.

En tenant compte de ce résultat dans l'identification des coefficients de $p_{\lambda\mu}^2$, il vient

$$a_\mu^h A_\lambda(a_\mu^k) = a_\mu^k A_\mu(a_\lambda^h) + a_\mu^h A_\mu(a_\lambda^k),$$

c'est-à-dire, à cause des relations (11),

$$\text{(I)} \qquad A_\mu(a_\lambda^h) = 0 \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, \rho, \ h = \rho + 1, \ldots, n).$$

6. Le nombre des fonctions a qui figurent dans le système linéaire est égal $\rho(n-\rho)$; considérons $n-\rho$ fonctions particulières, par exemple,

$$a_1^{\rho+1}, \quad a_1^{\rho+2}, \quad \ldots, \quad a_1^n,$$

et une autre fonction a_α^β, différente des précédentes. On a

$$\begin{aligned} A_\sigma(a_1^{\rho+1}) &= 0, \\ A_\sigma(a_1^{\rho+2}) &= 0, \\ &\ldots\ldots \\ A_\sigma(a_1^n) &= 0, \\ A_\sigma(a_\alpha^\beta) &= 0; \end{aligned}$$

ces équations constituent $n - \rho + 1$ relations linéaires entre les lettres $a_\sigma^{\rho+1}, a_\sigma^{\rho+2}, \ldots, a_\sigma^n$; le déterminant des coefficients est donc nul, et l'on a

$$\frac{D(a_\alpha^\beta, a_1^{\rho+1}, a_1^{\rho+2}, \ldots, a_1^n)}{D(p_\sigma, p_{\rho+1}, p_{\rho+2}, \ldots, p_n)} = 0,$$

l'indice σ pouvant varier de 1 à p; par suite, a_α^β considéré comme fonction des lettres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ est une fonction de $a_1^{\rho+1}, \ldots, a_1^n$. Donc

Les expressions $a(p_1, \ldots, p_n)$ sont des fonctions de $n - \rho$ d'entre

elles, et l'on a

$$a_\alpha^\beta = \Phi_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_n, z, a_1^{\rho+1}, a_1^{\rho+2}, \ldots, a_1^n).$$

Il ne reste plus qu'à étudier les équations

$$(12) \qquad A_\sigma(a_1^{\rho+1}) = 0, \quad \ldots, \quad A_\sigma(a_1^n) = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Supposons qu'il existe une fonction

$$U(a_1^{\rho+1}, a_1^{\rho+2}, \ldots, a_1^n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

telle que, si l'on remplace les a par un système d'intégrales des équations (11), les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ disparaissent.

On devra avoir

$$(13) \qquad \sum_{h=\rho+1}^{n} \frac{\partial U}{\partial a_1^h} \frac{\partial a_1^h}{\partial p_\sigma} + \frac{\partial U}{\partial p_\sigma} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, \rho),$$

$$(14) \qquad \sum_{h=\rho+1}^{n} \frac{\partial U}{\partial a_1^h} \frac{\partial a_1^h}{\partial p_k} + \frac{\partial U}{\partial p_k} = 0 \qquad (k = \rho+1, \ldots, n).$$

Laissons σ fixe, multiplions l'équation (14) par a_σ^k, faisons varier k de $\rho+1$ à n, et ajoutons; nous aurons, en tenant compte des relations (I) (p. 361),

$$(15) \qquad \frac{\partial U}{\partial p_\sigma} + \sum_{k=\rho+1}^{n} \frac{\partial U}{\partial p_k} a_\sigma^k = 0,$$

ce qui montre que la fonction U est donnée par un système complet.

Réciproquement, considérons $n-\rho$ intégrales indépendantes du système (15) $U_1, U_2, \ldots, U_{n-\rho}$ et écrivons les équations

$$U_1 \quad (a_1^{\rho+1}, \ldots, a_1^n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \text{const.},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U_{n-\rho}(a_1^{\rho+1}, \ldots, a_1^n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \text{const.},$$

nous allons montrer que les valeurs des a tirées de ces équations constituent un système d'intégrales des équations (12).

On a en effet, en différentiant ces équations,

$$\sum_{h=\rho+1}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial a_1^h} \frac{\partial a_1^h}{\partial p_\sigma} + \frac{\partial U_i}{\partial p_\sigma} = 0,$$

$$\sum_{h=\rho+1}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial a_1^h} \frac{\partial a_1^h}{\partial p_k} + \frac{\partial U_i}{\partial p_k} = 0,$$

et, si l'on effectue la même combinaison que plus haut, il vient

$$\sum_{h=\rho+1}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial a_1^h} \left(\frac{\partial a_1^h}{\partial p_\sigma} + \sum_{k=\rho+1}^{n} a_\sigma^k \frac{\partial a_1^h}{\partial p_k} \right) = 0,$$

et comme, par hypothèse, les équations proposées sont indépendantes,

$$\frac{D(U_1, U_2, \ldots, U_{n-\rho})}{D(a_1^{\rho+1}, \ldots, a_1^n)} \neq 0,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial a_1^h}{\partial p_\sigma} + \sum_{k=\rho+1}^{n} a_\sigma^k \frac{\partial a_1^h}{\partial p_k} = 0.$$

C. Q. F. D.

Le système (14) s'intègre immédiatement et donne

$$p_k - a_1^k p_1 - a_2^k p_2, - \ldots - a_\rho^k p_\rho = \text{const.};$$

nous arrivons au théorème suivant :

Si le système

$$p_{ik} = a_1^k p_{i1} + a_2^k p_{i2} + \ldots + a_\rho^k p_{i\rho} + A_{ik},$$
$$p_{hk} = a_1^k p_{h1} + a_2^k p_{h2} + \ldots + a_\rho^k p_{h\rho} + A_{hk}$$

est complètement intégrable, les $\rho(n-\rho)$ coefficients a sont des

---

(1) Il y a exception pour les systèmes provenant de la différentiation d'un système du premier ordre en involution.

fonctions de $n-\rho$ d'entre eux, de la fonction inconnue z et des variables indépendantes (¹), *et l'on a en outre les relations*

$$p_n - a_1^k p_1 - \ldots - a_\rho^k p_\rho = \psi_k(x_1 \ldots, x_n, z).$$

7. Les équations

$$A_\sigma f = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, \rho)$$

constituent un système complet dont les coefficients sont tous des solutions du système; les résultats précédents nous conduisent donc au théorème :

Pour former tous les systèmes complets

$$\frac{\partial f}{\partial x_\sigma} + \sum_{h=\rho+1}^{n} a_\sigma^h \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0,$$

dont les coefficients sont des intégrales du système lui-même, il suffit d'écrire les relations

$$x_k - a_1^k x_1 - \ldots - a_\rho^k x_\rho = \text{const.},$$

et de choisir $(\rho - 1)(n - \rho)$ *coefficients comme fonctions arbitraires des* $n - \rho$ *suivants.*

Recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor;

PAR M. LÉOPOLD LEAU.

INTRODUCTION.

Le mode de représentation des fonctions analytiques le plus naturel et le plus important est fourni par leurs développements suivant les puissances croissantes des variables. On sait comment, guidé par cette idée, M. Méray a su donner aux théories fondamentales de l'Analyse une harmonieuse unité. Pourtant, la connaissance d'une fonction définie par une série de Taylor est peu avancée, même dans le cas d'un seul argument. En supposant le rayon de convergence fini et différent de zéro, la première question qui se pose est de savoir si la fonction peut être prolongée au delà de ce cercle et, s'il en est ainsi, de déterminer ses points singuliers. Or, l'étude de la série sur son cercle de convergence est un problème difficile. On a pu construire des séries admettant leur cercle comme coupure : l'exemple suivant, $\sum b^n z^{c^n}$, où c est un entier positif, a été donné par Weierstrass; mais c'est seulement en 1896 que M. Borel (1) a établi cette belle propriété : en général, le cercle de convergence est une coupure.

(1) *Comptes rendus* du 14 décembre.

Auparavant, M. Hadamard [1] avait cherché les singularités situées sur le cercle de convergence et obtenu d'importants résultats. Ses recherches ont été reprises et complétées [2] par M. Fabry, qui est parvenu à des propriétés nouvelles et d'un grand intérêt, grâce à d'habiles calculs, malheureusement assez complexes.

M. Le Roy [3] a repris la même question par une méthode différente. M. Lindelöf [4] a énoncé le principe général qui relie le problème posé à celui de la représentation conforme, et en a tiré parti surtout pour le calcul effectif des valeurs de la fonction en dehors du cercle de convergence. En outre de la propriété énoncée plus haut, M. Borel [5] a donné des indications diverses sur le même sujet et, en particulier, l'a rattaché à ses recherches sur la sommabilité des séries divergentes.

Enfin la question proposée par l'Académie des Sciences : *Chercher à étendre le rôle que peuvent jouer en Analyse les séries divergentes*, a été l'objet d'importants travaux d'une publication prochaine [6].

Le présent Travail a pour but l'étude des fonctions représentées par les séries de Taylor à une variable, tant sur le cercle de convergence qu'au dehors de ce cercle, et il se divise en deux Chapitres correspondants.

On y trouve des exemples variés de séries admettant leur cercle de convergence comme coupure et des types assez généraux de séries dont les singularités sont connues soit sur le cercle, soit même dans tout le plan. Ces résultats ne sont pas tous nouveaux : les méthodes diverses employées par M. Fabry, M. Le Roy et celles exposées ici, ont fourni des propriétés en partie communes. Voici l'idée directrice de ce Mémoire : On sait que, lorsqu'on veut se rendre compte de la conver-

---

(1) *Journal de Mathématiques*, 1892.

(2) *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XIII; *Acta mathematica*, t. XXII; *Journal de Mathématiques*, 1898.

(3) *Comptes rendus* du 31 octobre 1898, du 20 février 1899.

(4) *Acta societatis Fennicæ*, 1898.

(5) *Comptes rendus*, 5 octobre et 14 décembre 1896, 12 décembre 1898; *Acta mathematica*, t. XXI; *Journal de Mathématiques*, 1896.

(6) Depuis la rédaction du présent Travail, le Mémoire couronné de M. Borel, *Mémoire sur les séries divergentes*, a été publié dans les *Annales de l'École Normale*.

gence d'une série, il y a lieu de considérer non pas *simultanément*, mais *successivement* la suite des coefficients; de même, la possibilité du prolongement de la fonction, sur le cercle ou dans le plan, dépend non pas de la totalité des coefficients pris simultanément, mais d'*ensembles de pareils coefficients envisagés dans leur succession*. Ce fait rend possible *la comparaison d'une série donnée, avec d'autres séries plus simples, déjà connues*. Telle est la méthode employée.

Dans la seconde Partie, l'étude des fonctions dans le plan a été complétée par l'extension d'un théorème important dû à M. Hadamard [1].

CHAPITRE I.

ÉTUDE DES SÉRIES DE TAYLOR SUR LE CERCLE DE CONVERGENCE.

---

1. *Exposé de la méthode.* — Soit une fonction $f(z)$ donnée par une série de Taylor

$$\sum a_p z^p. \tag{1}$$

Nous supposons que le rayon de convergence de cette série est fini et, de plus, qu'il est égal à l'unité. Cette dernière hypothèse ne restreint pas la généralité de la question, puisqu'il suffit d'un changement de variable de la forme $z = kz'$ pour ramener tout autre cas à celui-là.

2. Prenons sur le cercle de convergence un arc PQ. Pour voir s'il y a sur cet arc des points singuliers de $f(z)$, il est naturel, d'après la notion même du prolongement analytique, de prendre sur le rayon

---

[1] *Acta mathematica*, t. XXII. — Une partie des résultats exposés ici ont été indiqués dans trois Notes insérées aux *Comptes rendus* du 24 octobre et du 7 novembre 1898 et du 27 mars 1899, et dans une Note du *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVI, n° 10. Je ne développe pas dans ce Travail ce qui a trait à la sommation des séries divergentes.

bissecteur de l'arc PQ un point ω d'affixe b et de former la série

$$\sum \frac{1}{n!} f_{(b)}^{(n)} z^n. \tag{2}$$

Pour qu'il n'y ait pas de points singuliers entre P et Q, il faut et il suffit qu'on puisse choisir b assez petit pour que le rayon de convergence ρ de la nouvelle série soit au moins égal à l, l étant la distance ωP. D'ailleurs, l'inverse $\frac{1}{\rho}$ est, d'après un critérium de Cauchy, retrouvé par M. Hadamard qui en a fait d'heureuses applications, la plus grande des limites de l'expression

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!} \left| f_{(b)}^{(n)} \right|},$$

quand n croît indéfiniment.

L'expression ainsi introduite est d'une étude directe difficile. Elle fait intervenir une infinité de coefficients a. Cherchons donc s'il est possible de la remplacer par une autre plus simple sans modifier la plus grande de ses limites.

3. Nous nous appuierons sur la remarque suivante :

Soient $|u_n|^{\frac{1}{n}}$ et $|v_n|^{\frac{1}{n}}$ des variables dont les plus grandes limites sont respectivement α et β. Si α est plus grand que β, et si l'on pose

$$u_n = v_n + w_n,$$

la plus grande des limites de $|w_n|^{\frac{1}{n}}$ est α.

En effet :

1° λ étant supérieur à 1, s'il existait indéfiniment des n telles que

$$|w_n| > (\alpha\lambda)^n,$$

comme on aurait en même temps

$$|v_n| < (\beta\lambda)^n,$$

on en déduirait

$$|u_n| > (\alpha\lambda)^n \left[1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right],$$

ce qui est impossible, puisque $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$ tend vers o.

2° $\alpha\lambda$ étant compris entre β et α, si l'on finissait par avoir constamment

$$|w_n| < (\alpha\lambda)^n,$$

avec

$$|v_n| < (\alpha\lambda)^n,$$

on en conclurait

$$|u_n| < 2(\alpha\lambda)^n,$$

inégalité qui ne peut avoir lieu.

4. Cette remarque faite, formons le développement

$$(3) \qquad \frac{f_{(b)}^{(n)}}{n!} = \sum_{p=n}^{p=\infty} \frac{p!}{n!(p-n)!} a_p b^{p-n}.$$

Si t désigne un nombre aussi peu supérieur à 1 que l'on veut, il existe une constante M telle que l'on ait

$$|a_p| < \mathrm{M} t^p,$$

quel que soit p.

Posons $p = nx$, et ne considérons que les valeurs de p à partir d'une valeur p' telle que $p' - n$ soit une variable infiniment grande en même temps que n.

Lorsque s croît indéfiniment, le rapport

$$\frac{s!}{s^s e^{-s} \sqrt{2\pi s}}$$

tend vers 1 ; il en résulte que

$$\frac{p!}{n!(p-n)!} = \frac{x^{nx}}{(x-1)^{n(x-1)}} \sqrt{\frac{x}{2\pi n(x-1)}} \times \mathrm{L}_n.$$

L_n tendant vers 1 pour n infini. Par suite, en posant

$$\frac{x^x}{(x-1)^{x-1}}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2n}} t^x |b|^{x-1} = \Phi(x),$$

on a

$$\left|\frac{p!}{n!(p-n)!} a_p b^{p-n}\right|^{\frac{1}{n}} \leq \Phi(x)\sqrt[n]{\mathfrak{L}_n},$$

$\mathfrak{L}_n$ tendant vers 0. $\sqrt[n]{\mathfrak{L}_n}$ reste donc inférieur à un nombre $\mathfrak{L}$.

Si x est au moins égal à un nombre ξ supérieur à 1, on aura *a fortiori*

$$\frac{\Phi(x+1)}{\Phi(x)} < \frac{\xi+1}{\xi-1} t|b|.$$

Posons

$$\frac{\xi+1}{\xi-1} t = \lambda,$$

de sorte que

$$\frac{\Phi(x+1)}{\Phi(x)} < \lambda |b|.$$

Si A est le maximum de $\frac{x^x}{(x-1)^{x-1}}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2n}}$ lorsque x croît de ξ à $\xi+1$ et que n est quelconque, la somme des termes du développement (3), pour lesquels $\frac{p}{n}$ est au moins égal à ξ, a un module inférieur à

$$n\mathfrak{L}[A t^{\xi}|b|^{\xi-1}]^n \{1 + \lambda^n |b|^n + \lambda^{2n}|b|^{2n} + \ldots\}.$$

Si $|b|$ est suffisamment petit, cette expression est inférieure à

$$\frac{n\mathfrak{L}}{1-|\lambda b|^n}(A t^{\xi}|b|^{\xi-1})^n,$$

et la racine n^{ieme} de celle-ci à un nombre fixe arbitraire c, plus petit que les valeurs possibles de $\frac{1}{\rho}$.

5. Dès lors, en vertu de la remarque faite au n° 3, cela n'influera pas sur la plus grande des limites de $\left|\frac{1}{n!} f^{(n)}_{(b)}\right|^{\frac{1}{n}}$, de laisser de côté tous

les termes que l'on vient de considérer : *on peut se borner à faire varier, dans la formation de la dérivée, p de n à n',* $\frac{n'}{n}$ *restant supérieur à un nombre fixe plus grand que* 1, *pourvu que l'on choisisse* $|b|$ *assez petit.*

En d'autres termes, il existe des suites de nombres dépendant de b et d'un entier n,

$$\alpha_{n,n}, \alpha_{n+1,n}, \ldots, \alpha_{n',n},$$

telles que, dans les conditions énoncées, la solution du problème dépend de la plus grande des limites de

$$|\alpha_{n,n}a_n + \alpha_{n+1,n}a_{n+1} + \ldots + \alpha_{n',n}a_{n'}|^{\frac{1}{n}}.$$

Ce fait est important. M. Fabry a basé sur lui ses recherches dans le cas où l'arc considéré se réduit à un point. La démonstration que M. Borel a donnée du théorème que le cercle de convergence est en général une coupure repose sur une propriété toute semblable.

Des représentations conformes, autres que le prolongement analytique, donnent des résultats tout à fait analogues. Tel est, par exemple, le cas de celle que l'on obtient par une substitution de la forme

$$z = bz'e^{cz'},$$

où b et c désignent des constantes. Ce fait n'a rien de surprenant, et il est probablement général; mais, nous n'avons pas à l'utiliser.

6. L'expression introduite plus haut

$$\alpha_{n,n}a_n + \alpha_{n+1,n}a_{n+1} + \ldots + \alpha_{n',n}a_{n'}$$

joue dans l'extension des séries un rôle analogue à celui du terme général pour la convergence. Pour simplifier le langage, nous l'appellerons le *terme général étendu* de rang n de la série $\sum a_n z^n$, et n' sera son *indice*. Il est clair qu'il faudra préciser l'arc PQ du cercle de convergence, auquel il est relatif. Le cercle auxiliaire de centre ω (*voir* n° **2**) et qui passe par les points P et Q sera dit le *cercle associé à l'arc* et son rayon le *rayon associé*.

Terme général étendu, cercle et rayon associés dépendent de l'affixe b du point ω. Il sera souvent inutile de dire à quelle valeur de b l'on se sera arrêté, il suffira que $|b|$ soit assez petit ; et l'*on entendra que cette dernière condition est satisfaite lorsque la position du centre* ω *ne sera pas spécifiée* (¹).

Voici une dernière définition : Nous appellerons n^{ieme} *ensemble des coefficients*

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

la suite

$$a_n, \quad a_{n+1}, \quad \ldots, \quad a_{n'}$$

de ceux qui figurent dans le terme général étendu de rang n.

L'étude directe du terme général étendu paraît peu pratique (²). Aussi allons-nous d'abord nous servir du résultat fondamental énoncé au n° 5, *sans même nous préoccuper de la nature des coefficients* α. Nous formerons des séries ayant des arcs de points singuliers ou admettant le cercle de convergence pour coupure.

Formation de séries ayant des singularités données sur le cercle de convergence.

7. *Dans le cas général, une série de Taylor admet son cercle de convergence comme coupure.* — La démonstration que M. Borel a, pour la première fois, donnée de cet important théorème s'appuie sur la considération d'une *fonction entière associée* à la fonction pro-

(¹) Il ne serait même pas nécessaire dans nombre de cas de dire si le terme général étendu a été obtenu plutôt par la substitution $z = b + z'$ que par une autre ; mais si l'on ne faisait pas cette hypothèse on serait conduit à des complications de langage inutiles.

(²) Une des représentations conformes qui fournissent pour les α les valeurs les plus simples est $z = be^{cz'}$. Le coefficient complet de z'^n est, en effet,

$$\frac{c^n}{n!} \sum_p a_p b^p p^n.$$

Cependant, même dans ce cas, le calcul pour certaines lois des a_p est difficilement abordable.

posée, et sur ce fait, que, pour de grandes valeurs de l'argument, le module maximum de la fonction auxiliaire diffère peu de celui de polynomes obtenus en ne conservant qu'une partie de ses termes. Cette dernière propriété est semblable à celle établie au n° 3. Celle-ci va nous permettre, sans le secours de la *fonction associée*, de donner du même théorème une démonstration qui a des analogies avec la première, mais qui est un peu plus simple.

Soit une série de Taylor

$$(1) \qquad f(z) = \sum a_p z^p,$$

dont le rayon de convergence est l'unité. Étudier cette série dans le voisinage de la valeur $e^{2i\pi\omega}$ revient à étudier la suivante :

$$(4) \qquad \sum a_p e^{2i\pi p\omega} z^p$$

dans le voisinage de $z = 1$. Relativement à ce point, le terme général étendu de la série (4) est

$$\sum_{n}^{n'} {}_p\, \alpha_{p,n} a_p e^{2i\pi p\omega} = u_n(\omega).$$

Si b est l'affixe du centre du cercle associé, il existe certainement un angle $2\pi\omega$ tel que la plus grande des limites de la suite

$$|u_n(\omega)|^{\frac{1}{n}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

soit $\frac{1}{1-b}$, valeur qui d'ailleurs ne peut être surpassée quel que soit ω. Donc, si U_n désigne le maximum du module de $u_n(\omega)$ quand ω varie de 0 à 2π, $\frac{1}{1-b}$ est la plus grande des limites de $U_n^{\frac{1}{n}}$. Soit ω_n la valeur ou une des valeurs de ω (de 0 à 1), faisant atteindre à $u_n(\omega)$ son maximum.

On peut former une suite d'ensembles de coefficients a sans parties communes et tels que la suite S correspondante de U_n ait effectivement $\frac{1}{1-b}$ pour *limite*. Or, si la série (1) est *quelconque*, sous la

réserve que le rayon de convergence est égal à l'unité, les points $e^{2\pi i\omega_n}$ *n'ont aucun lien entre eux;* ces points forment un ensemble $\sum$ qui correspond à S. Dans le cas général, il y a une infinité de points de $\sum$ sur tout arc PQ de la circonférence de convergence. Or, s'il existait un pareil arc PQ, régulier pour la fonction (1), pour chaque valeur de ω relative à cet arc, le développement

$$(5) \qquad \sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(be^{2i\pi\omega}) z^n$$

serait convergent dans un cercle de rayon supérieur à un nombre k, supérieur lui-même à $1 - b$. Par suite, *pour toutes ces valeurs de* ω, on aurait à partir d'une certaine valeur de n

$$(6) \qquad \left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(be^{2i\pi\omega}) \right|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{k}$$

et aussi [1]

$$(7) \qquad |u_n(\omega)|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{k'} \qquad \left(\frac{1}{k} < \frac{1}{k'} < \frac{1}{1-b} \right).$$

C'est là une conséquence en contradiction avec la distribution des points de $\sum$; le théorème est donc établi.

8. *Premier exemple de formation des séries.* — Soit

$$(1) \qquad \sum a_p z^p.$$

[1] Si l'on se reporte au n° 4, on remarque en effet que la série (1) n'intervient dans la démonstration que par l'inégalité

$$|a_p| < M t^p,$$

de sorte que pour *toutes* les séries dont les modules ont une limite supérieure finie à l'intérieur d'un cercle fixe concentrique au cercle de convergence, il y a un *moment* à partir duquel la racine $n^{\text{ième}}$ de l'ensemble des termes négligés reste en valeur absolue inférieure à une *constante arbitrairement choisie*. Tel est évidemment le cas pour les séries (5) et l'on peut ainsi passer de l'inégalité (6) à l'inégalité (7).

une série pour laquelle le point d'affixe $+1$ est singulier. Le terme général étendu par rapport à ce point étant désigné par u_n, la plus grande des limites de la suite

$$|u_n|^{\frac{1}{n}}, \quad |u_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}, \quad |u_{n+2}|^{\frac{1}{n+2}}, \quad \ldots,$$

est $\frac{1}{1-b}$, b ayant la même signification qu'au numéro précédent. On ne changera pas cette limite maximum en ne conservant de la suite qu'une infinité de termes *convenablement choisis*. Cette restriction doit d'ailleurs être levée si la suite considérée a une limite, au sens ordinaire du mot. Il résulte de là que si, sans changer le rayon de convergence de la série proposée, nous modifions ses coefficients à l'exception de ceux qui figurent dans une infinité de termes u_n, le point $+1$ ne cessera pas d'être sur le cercle un point singulier.

Remarquons maintenant que si une série $\sum a_p z^p$ n'est pas régulière pour $z = +1$, la série $\sum a_p e^{-2i\pi p\omega} z^p$ ne le sera pas pour $z = e^{2\pi\omega i}$, et que la suite des termes étendus de la seconde pour la seconde valeur sera identique à celle des termes étendus de la première pour la première $+1$. En rapprochant ces deux remarques, on voit un moyen de déduire de la fonction proposée une infinité d'autres ayant sur le cercle de convergence des points ou des arcs singuliers fixés à l'avance.

Formons des suites d'ensembles des coefficients a

$$\begin{array}{llll}
(\Sigma_1) & E_{n_1}, & E_{n_1+r_1}, & E_{n_1+r_1+s_1}, & \ldots, \\
(\Sigma_2) & E_{n_2}, & E_{n_2+r_2}, & E_{n_2+r_2+s_2}, & \ldots, \\
(\Sigma_3) & E_{n_3}, & E_{n_3+r_3}, & E_{n_3+r_3+s_3}, & \ldots, \\
 & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots,
\end{array}$$

satisfaisant aux conditions suivantes : 1° il n'y a pas deux ensembles ayant un coefficient a commun; 2° chaque suite $\sum$ donne lieu à une suite d'expressions $|u_n|^{\frac{1}{n}}$ *convenablement choisie*, comme il est dit plus haut (cette restriction étant inutile dans le cas déjà signalé). Donnons-

nous à présent des angles

$$2\pi\omega_1, \quad 2\pi\omega_2, \quad \ldots, \quad 2\pi\omega_p, \quad \ldots.$$

Si, pour chaque valeur de p, nous multiplions chaque coefficient a_n, appartenant à $\sum_p$, par $e^{-2i\pi n\omega_p}$, nous obtiendrons *une nouvelle série* $\sum a'_p z^p$ *qui a tous les points* $e^{2\pi\omega i}$ *pour points singuliers.* On voit combien ce procédé comporte d'indétermination. D'ailleurs, les ensembles eux-mêmes E ne sont pas bien définis, puisque nous avons assujetti seulement le rapport $\frac{n'}{n}$ à rester finalement supérieur à un nombre fixe plus grand que 1. Il est évident que cette méthode ne nous apprend rien sur les points autres que les $e^{2\pi\omega i}$ et leurs points limites.

9. Voici quelques types de séries déduits de

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots.$$

Soit 2^q la plus haute puissance de 2 contenue dans l'entier p.

1° La série $\sum e^{-\frac{2i\pi pq}{10}} z^p$ a pour points singuliers les sommets d'un décagone régulier inscrit, l'un d'eux étant $+1$.

2° La série $\sum e^{-2ipq} z^p$ a le cercle de convergence pour coupure.

3° Considérons les différences entre les quantités

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{2}{\sqrt{2}}, \quad \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad \ldots,$$

et leurs parties entières. Soit ω_q la $q^{\text{ième}}$ quantité donnant lieu à une différence au plus égale à $\frac{1}{2}$, la série

$$\sum e^{-2i\pi p\omega_q} z^p$$

admet comme arc singulier la demi-circonférence ayant pour rayon bissecteur la partie positive de l'axe des quantités réelles.

On peut évidemment varier ces exemples à l'infini.

10. Deuxième exemple : *Généralisation d'un théorème de Weierstrass.* — Soit une série

$$(1)\qquad f(z) = \sum a_p z^p,$$

telle que a_p soit positif et que $\sqrt[p]{a^p}$ tende vers 1 quand p est infiniment grand. Nous allons chercher à annuler certains coefficients de manière à obtenir des points singuliers. Pour étudier la fonction dans le voisinage de la valeur $e^{2i\pi\omega}$ de la variable, je pose $z = e^{2i\pi\omega} z'$, en sorte qu'on a le développement

$$(8)\qquad \sum a_p e^{2i\pi p\omega} z'^p$$

à considérer pour $z' = 1$. Le $n^{\text{ième}}$ terme étendu de cette nouvelle série est alors

$$\alpha_{n,n} a_n e^{2i\pi n\omega} + \alpha_{n+1,n} a_{n+1} e^{2i\pi(n+1)\omega} + \ldots + \alpha_{n',n} a_{n'} e^{2i\pi n'\omega}.$$

On peut l'écrire $A_n + iA'_n$ en désignant respectivement par A_n et A'_n les polynomes

$$\sum_n^{n'} \alpha_{p,n} a_p \cos 2\pi p\omega, \quad \sum_n^{n'} \alpha_{p,n} a_p \sin 2\pi p\omega.$$

L'expression $(A_n^2 + A_n'^2)^{\frac{1}{2n}}$ étant supérieure à $A_n^{\frac{1}{n}}$, si la valeur 1 est singulière pour la série

$$(9)\qquad \sum a_p \cos 2\pi p\omega \,.\, z^p$$

elle le sera également pour la série (8).

11. Voyons à quelles conditions on aura

$$(10)\qquad \cos 2\pi p\omega > \eta,$$

η *étant un nombre positif fixe.* Soit k l'entier le plus voisin de $p\omega$

et θ la différence $p\omega - k$, il suffit évidemment que l'on ait

$$-\frac{1}{4} + \lambda \leqq \theta \leqq \frac{1}{4} \pm \lambda,$$

λ étant un nombre positif fixe, inférieur à $\frac{1}{4}$, ou bien

$$-\mu \leqq \theta \leqq \mu,$$

en posant $\frac{1}{4} - \lambda = \mu$.

Il résulte de là que, si l'on fixe une valeur de k, les valeurs acceptables correspondantes de p sont les valeurs comprises dans l'intervalle $\frac{k-\mu}{\omega}$, $\frac{k+\mu}{\omega}$. Les intervalles que l'on obtient ainsi en donnant à k toutes les valeurs entières n'empiètent d'ailleurs pas les uns sur les autres. Par exemple, si nous prenons $\mu = \frac{1}{5}$ et $\omega = \frac{2}{5}$, les valeurs de p qui ne satisferont pas à l'inégalité (10) seront

$$1,\ 4,\ 6,\ 9,\ 11,\ 14,\ 16,\ \ldots.$$

12. Ceci posé, soient

$$u_n = \sum_{n}^{n'} \alpha_{p,n} a_p$$

et

$$v_n = \sum_{n}^{n'} \alpha_{p,n} a_p \cos 2\pi p\omega.$$

Si dans u_n et v_n nous annulons précisément les coefficients a_p qui ne satisfont pas à l'inégalité (10), nous aurons

$$u_n > v_n > \eta u_n.$$

Or, n_1 étant le premier entier supérieur ou au moins égal à n, tel que a_{n_1} ne soit pas nul, $n_1 - n$ reste, pour une valeur donnée de ω, inférieur à une limite fixe. En se reportant à l'expression du terme général étendu, on constate sans peine que dans ces conditions $\sqrt[n]{u_n}$ *tend* vers $\frac{1}{1-b}$ lorsque n croît indéfiniment, et que, par suite, il en est

de même de $\sqrt[n]{c_n}$. Cette conclusion subsiste si l'on ne considère qu'une certaine suite formée d'une infinité d'expressions c_n.

15. Il suffit donc, pour que le point $e^{2i\pi\omega}$ soit singulier pour les séries (9) et (8), que dans une infinité d'ensembles E_n relatifs aux nombres a_0, a_1, a_2, ..., les coefficients a_p dont l'indice p ne satisfait pas à l'inégalité (10) soient nuls. De là, un moyen de construire une infinité de fonctions admettant des points ou des arcs singuliers. Supposons, par exemple, qu'on veuille qu'un arc PQ soit singulier. On prendra sur cet arc des points $e^{2i\pi\omega_1}$, $e^{2i\pi\omega_2}$, ..., $e^{2i\pi\omega_s}$, ... de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

1° Tout point choisi une fois le sera ensuite indéfiniment ;

2° Tout point de l'arc sera l'un de ceux-là ou un de leurs points limites.

Ensuite, on partage la suite a_0, a_1, a_2, ... en ensembles

$$E_{n_1}, \quad E_{n_2}, \quad \ldots, \quad E_{n_s}, \quad \ldots$$

qui ne sont pas nécessairement successifs, mais qui n'empiètent pas les uns sur les autres, et on les fait respectivement correspondre aux points de l'arc. Dans chaque ensemble, on supprime certains coefficients a d'après le procédé indiqué plus haut. Le nombre η de l'inégalité (10) peut d'ailleurs varier avec chaque nouvel angle $2\pi\omega$. Enfin, on peut encore supprimer d'autres coefficients, pourvu que dans la suite d'ensembles E_n relatifs à l'un quelconque des angles $2\pi\omega$, la différence $n_1 - n$ ne devienne pas infiniment grande avec n. Toute série obtenue par cette méthode répondra à la question. Nous parvenons ainsi à une extension d'un théorème de Weierstrass sur l'impossibilité, pour la fonction $\sum a^p z^{m^p}$, de sortir du cercle de convergence, m étant un entier [1].

---

[1] *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. II, Chap. II.

Formation de séries régulières le long d'un arc du cercle de convergence. Enveloppes de séries.

14. Imaginons des séries

$$f_1(z) = \sum a_{p,1} z^p,$$

$$f_2(z) = \sum a_{p,2} z^p,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f_k(z) = \sum a_{p,k} z^p,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Ces séries ont un cercle de convergence de rayon égal à l'unité;

2° Elles sont régulières le long d'un arc PQ de ce cercle;

3° Les racines $n^{\text{ièmes}}$ des modules des coefficients $a_{n,k}$ ont *simultanément* $+1$ pour limite supérieure;

4° Les racines $n^{\text{ièmes}}$ des modules de leurs termes étendus de rang n relatifs à l'arc PQ ont *simultanément* pour plus grande limite au plus l'inverse du rayon associé ([1]).

5° Dans les différences $f_{n+1}(z) - f_n(z)$ les termes dont le rang varie de n à $\varphi(n)$, $\frac{\varphi(n)}{n}$ restant supérieur à un nombre plus grand que 1, admettent comme termes majorants ceux d'une certaine série fixe *plus*

([1]) En disant que des suites, dépendant de l'indice i,

$$c_{0,i}, \quad c_{1,i}, \quad c_{2,i}, \quad \ldots$$

ont *simultanément* au plus l pour limite supérieure, j'entends que, quel que soit l' supérieur à l, il y a une valeur de n telle que pour $p > n$ et i quelconque on a

$$c_{p,i} < l'.$$

En se reportant au début du Chapitre, à l'exposé de la méthode, on voit de suite, *en vertu de la condition* 3°, que si la condition 4° est vérifiée pour une *certaine forme* du terme étendu, c'est-à-dire pour un certain choix de l'*indice* de ce terme en fonction de son *rang*, elle l'est également pour toute autre forme (le cas de l'indice infini n'est pas exclu).

étendue, c'est-à-dire de rayon de convergence plus grand que celui des séries $f(z)$, $\sum h^p z^p (h < 1)$.

Ces conditions seront dites les *conditions fondamentales*.

Si $\varphi(n)$ n'est pas une fonction non décroissante, remplaçons-la par une autre qui lui soit au plus égale et qui, elle, jouisse de cette propriété; choisissons ensuite cette nouvelle fonction comme indice n' des termes étendus de rang n. Supposons enfin, ce qui est permis, n' tel que $\sqrt[n]{n'}$ ait 1 pour plus grande limite; cette hypothèse exclut des modes de croissance trop rapide de n'.

15. *Des séries proposées nous allons déduire de bien des manières de nouvelles séries ayant un rayon de convergence au moins égal à 1 et régulières le long de l'arc* PQ.

On peut dire, par une comparaison naturelle, que les séries f sont tangentes deux à deux le long de polynomes de plus en plus étendus et éloignés; le polynome de contact de la série f_n avec la suivante f_{n+1} est formé, par exemple, des termes de f_n dont le degré va de n à n'. Or *formons une série* $F(z) = \sum A_p z^p$ *en prenant le terme* $A_p z^p$ *au hasard dans une des séries* f *où il figure dans un polynome de contact.* Je dis que $F(z)$ répond à la question.

Soient, en effet, $u_{n,1}, u_{n,2}, \ldots, u_{n,n}$ et U_n les termes généraux étendus de rang n des séries $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et F, et évaluons la différence $U_n - u_{n,n}$. Dans ce but, je prends un coefficient A_p qui entre dans U_n, et je suppose, par exemple, $A_p = a_{p,k}$. On a, si $k > n$,

$$a_{p,k} = a_{p,n} + (a_{p,n+1} - a_{p,n}) + \ldots + (a_{p,k} - a_{p,k-1}).$$

Toutes les différences sont inférieures en module à h^p, car $a_{pn} z^p$ et $a_{pk} z^p$ faisant partie des polynomes de contact, il en est de même des termes

$$a_{p,n+1} z^p, \quad \ldots, \quad a_{p,k-1} z^p.$$

D'ailleurs le nombre de ces différences ne dépasse pas n' : donc on a

$$|a_{p,k} - a_{p,n}| < n' h^p.$$

Par suite, $|U_n - u_{n,n}|$ est inférieur à n' fois le terme étendu relatif à la série $\sum h^p z^p$; et comme $\sqrt[n]{n'}$ a pour plus grande limite 1, il résulte de là et de l'hypothèse 4° que la limite maximum de $|U_n|$ est au plus l'inverse du rayon associé. La proposition est donc établie.

En reprenant notre image géométrique, on voit que la série $F(z)$ est en quelque sorte l'*enveloppe* des séries proposées. Cette enveloppe n'est pas déterminée d'une manière unique.

16. *Première application.* — Soit $f(z)$ une fonction n'ayant sur le cercle fondamental que le point $+1$ comme point singulier. La substitution $z' = 1 - x + xz$, *où x désigne un nombre positif inférieur à* 1, permet de former de nouvelles fonctions $f(1 - x + xz)$ qui se trouvent dans les mêmes conditions que la première.

Traçons un cercle c, de centre ω situé sur la partie négative de l'axe des quantités réelles, débordant d'aussi peu que l'on veut sur le cercle fondamental, à l'exception d'un arc très petit laissé en dehors et sur lequel est situé le point $+1$. Les extrémités d'un diamètre de ce cercle ont pour affixes $1 - \varepsilon$, $-1 - \varepsilon'$. *Si l'on suppose que x reste supérieur à un nombre positif fixe* α, au cercle c du plan des z correspond dans le plan des z' un cercle c' intérieur à un cercle fixe C dont un diamètre a pour extrémités les points $1 - \alpha\varepsilon$, $-1 - \varepsilon'$. Sur ce cercle et à son intérieur (ε' étant suffisamment petit), $f(z')$ est holomorphe; j'appelle $\mathfrak{M}$ le maximum de son module.

Alors, au point ω, R étant le rayon du cercle c, on a

$$\frac{1}{n!}\left|\frac{d^n f(1-x+xz)}{dz^n}\right| < \frac{\mathfrak{M}}{R^n}.$$

Donc il existe un nombre λ, aussi peu supérieur à 1 que l'on voudra, tel que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de n, et quel que soit x entre α et 1,

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|\frac{d^n f(1-x+xz)}{dz^n}\right|_{z=\omega}} < \frac{\lambda}{R}.$$

Ainsi, si l'on donne à x des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, les séries correspondantes satisfont aux conditions fondamentales 1°, 2° et 4°.

La troisième condition est évidemment vérifiée : cherchons à réaliser aussi la cinquième.

17. Posons

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n f(1-x+xz)}{dz^n} = g(x, z),$$

et désignons par x' et x'' deux valeurs quelconques de x dans les limites indiquées.

On a

$$g(x', 0) - g(x'', 0) = (x'-x'')\lambda\left[\frac{\partial g(x, 0)}{\partial x}\right]_{x=\xi}$$

avec

$$|\lambda| \leqq 1$$

et

$$x' < \xi < x''$$

ou

$$x' > \xi > x''.$$

Or, si l'on pose

$$f(z) = \sum a_p z^p$$

et si l'on choisit un nombre t un peu supérieur à 1, il existe une constante M telle que

$$|a_p| < t^p \text{M}.$$

Lorsque z restera sur un cercle de rayon r inférieur à $\frac{1}{t}$ le module de $\frac{\partial f(1-x+xz)}{\partial x}$ restera manifestement inférieur à

$$\frac{\text{A}\, t(1+r)}{[1-t(1-x+xr)]^2},$$

et, par suite,

$$|g(x', 0) - g(x'', 0)| < \frac{|x'-x''|\text{M}\, t(1+r)}{r^n[1-t(1-\xi+\xi r)]^2}.$$

Supposons que l'on prenne, entre α et 1, les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$, de manière que *la plus grande des limites des termes de la*

suite

$$|x_2 - x_1|^1,\quad |x_3 - x_2|^{\frac{1}{2}},\quad \ldots,\quad |x_{p+1} - x_p|^{\frac{1}{p}},\quad \ldots,$$

soit un nombre k inférieur à 1. Il suffira de choisir $\frac{1}{t}$ et r supérieurs à k, puis un nombre l compris entre k et r, pour que le coefficient du terme de rang n dans la différence

$$f(1 - x_{p+1} + x_{p+1}z) - f(1 - x_p + x_p z);$$

soit, à partir d'une certaine valeur de p, plus petit en module que

$$P \times \frac{l^p}{r^n}$$

où P désigne une constante.

Dès lors, si n varie de p à $p(1+\varepsilon)$, ε étant positif, fixe et convenablement choisi, cette expression $P \times \frac{l^p}{r^n}$ est inférieure au coefficient de rang n d'une série de comparaison dont le rayon de convergence est plus grand que l'unité; et, par suite, les fonctions f satisfont à la cinquième condition fondamentale.

Ainsi les x_p étant choisis comme il a été dit, on peut, par la méthode exposée au n° **15**, déduire des séries $f(1 - x_p + x_p z)$ une infinité d'autres régulières sur le cercle de convergence, sauf peut-être au point 1.

Remarque. — D'autres substitutions conduisent à des résultats analogues; je citerai la suivante

$$z' = xz e^{-z\,\mathrm{L}x}.$$

18. Deuxième application : *Séries dont les coefficients de rang n sont certaines fonctions de* $\frac{1}{n}$. Soit p un entier non négatif et la série

$$(11)\qquad S_p(z) = \frac{z}{1^p} + \frac{z^2}{2^p} + \ldots + \frac{z^n}{n^p} + \ldots.$$

Les fonctions $S_0(z)$, $S_1(z)$, $S_2(z)$, ... satisfont évidemment aux

trois premières conditions fondamentales (n° **14**); et le point $+1$ est leur seul point singulier sur le cercle de convergence. *Il en est de même des fonctions*

$$(12)\quad \begin{cases} f_0(z) = c_0 S_0(z), \\ f_1(z) = c_0 S_0 + c_1 S_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f_p(z) = c_0 S_0 + c_1 S_1 + \ldots + c_p S_p, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

où les c désignent des constantes telles que la série

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_p t^p + \ldots$$

admet un cercle de convergence de rayon r différent de 0.

19. Relativement à un arc quelconque PQ du cercle de rayon 1, ne comprenant pas $+1$, je dis que la quatrième condition est aussi vérifiée par les fonctions $f(z)$.

A cet effet, je considère les séries

$$(13)\qquad \varepsilon_p(z) = \frac{z^h}{h^p} + \frac{z^{h+1}}{(h+1)^p} + \ldots$$

déduites des $S_p(z)$ en laissant de côté leurs $h-1$ premiers termes. Je suppose que dans une aire A en tout point de laquelle on peut arriver en restant à son intérieur et en suivant un segment issu de l'origine, $\varepsilon_p(z)$ soit holomorphe et que son module en un point z quelconque $(|z| = \rho)$ soit au plus égal à $M_p \rho^h$, M_p étant une certaine constante.

L'intégrale

$$\int_0^z \frac{\varepsilon_p(z)}{z}\,dz$$

est holomorphe dans la même aire et définit $\varepsilon_{p+1}(z)$. D'ailleurs

$$\left|\int_0^z \frac{\varepsilon_p(z)}{z}\,dz\right| < \int_0^\rho M_p \rho^{h-1}\,d\rho = \frac{M_p \rho^h}{h}.$$

Donc, en un point z de l'aire, si l'on pose

$$|\varepsilon_{p+1}(z)| < M_{p+1} \rho^h,$$

on peut prendre

$$M_{p+1} = \frac{M_p}{h}.$$

Donc, enfin

$$M_p = \frac{M_0}{h^p}.$$

Soient R le rayon et b l'affixe du centre du cercle associé à l'arc PQ, $\mathfrak{M}$ le maximum de $\varpi_0(z)$ sur ce cercle, on a évidemment, dès que n est supérieur à h,

$$\frac{1}{n!}\left|\frac{d^n f_p(z)}{dz^n}\right|_{z=b} < \frac{\mathfrak{M}}{R^n}\left\{|c_0| + \frac{|c_1|}{h} + \frac{|c_2|}{h^2} + \ldots + \frac{|c_p|}{h^p}\right\}.$$

Or, si l'on suppose $\frac{1}{h}$ plus petit que le rayon r de la série $\sum c_m t^m$, la propriété annoncée devient évidente.

20. Enfin, $f_{n-1}(z) - f_n(z) = c_n S_n(z)$. Dans cette différence, les termes dont le rang varie de n à la valeur plus grande $\varphi(n)$ sont comparables à ceux d'une série fixe plus étendue pour $\varphi(n) < sn\,\mathrm{L}n$, s étant un nombre positif fixe quelconque.

Donc, si l'on désigne par ν une fonction de n, prenant des valeurs entières au plus égales à n et telles que n soit inférieur à $s\nu\,\mathrm{L}\nu$, *la série*

$$\sum_1^\infty {}_n\left(c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots + \frac{c_\nu}{n^\nu}\right) z^n$$

a le seul point singulier $+1$ *sur le cercle de convergence.*

21. On peut compléter les résultats qui précèdent. Soient $\psi_n(t)$ des séries n'ayant pas de termes de degré inférieur à $n+1$ et dont le rayon de convergence surpasse $\frac{\lambda}{n}$, λ étant un nombre fixe supérieur à 1. Supposons que t décrivant un cercle de rayon au moins égal à $\frac{\lambda}{n}$ et dont le centre est à l'origine, le module des $\psi_n(t)$ reste fini, il est clair que la série $\sum \psi_n\left(\frac{1}{n}\right) t^n$ a un cercle de convergence de rayon plus grand que 1.

Associant cette remarque aux conclusions ci-dessus, faisons $\nu = n$, et nous aurons le théorème que voici :

Théorème. — *Soient des nombres $c_0, c_1, \ldots, c_p, \ldots$ tels que la série $\sum c_p t^p$ ait un rayon de convergence différent de* 0, *et des fonctions*

$$g_0(t), \quad g_1(t), \quad \ldots, \quad g_n(t), \quad \ldots,$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *On a, en ordonnant,*

$$g_n(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n + \psi_n(t);$$

2° *Il existe un nombre λ supérieur à* 1, *tel que le rayon de convergence de la série $g_n(t)$ soit plus grand que $\frac{\lambda}{n}$;*

3° *Lorsque l'on fait décrire à t une circonférence dont le centre est à l'origine et dont le rayon est au moins égal à $\frac{\lambda}{n}$, la suite des modules des fonctions $\psi_n(t)$ a une limite supérieure finie.*

Le point $+1$ *est le seul point singulier de la série $\sum g_n\left(\frac{1}{n}\right) z^n$ sur le cercle de convergence.*

22. *Cas particulier.* — Les fonctions $g_n(t)$ peuvent être identiques; on a, dans ce cas, la série

$$\sum g\left(\frac{1}{n}\right) z^n,$$

$g(t)$ étant holomorphe à l'origine. (On supprime au besoin les premiers coefficients de la série en z.)

Exemples :

$$\sum \frac{n-1}{n^2+1} z^n, \quad \sum e^{\frac{1}{n}} z^n, \quad \ldots.$$

23. Troisième application : *Séries dont les coefficients de rang n sont certaines fonctions de n.*

Cette application se présente d'une manière toute semblable à la précédente.

Soit p un entier non négatif et la série

(14) $$S_p(z) = 1^p z + 2^p z^2 + \ldots + n^p z^n + \ldots.$$

Les fonctions $S_0(z)$, $S_1(z)$, $S_2(z)$, ..., satisfont aux deux premières conditions fondamentales, et ont seulement $+1$ pour point singulier sur le cercle de convergence et même dans le plan. *Il en est de même des fonctions*

(15) $$\left\{\begin{array}{l} f_0(z) = c_0 S_0(z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_p(z) = c_0 S_0 + c_1 S_1 + \ldots + c_p S_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

où les c sont des constantes. Mais, si la série $\sum_{p=1}^{p=\infty} c_p t^p$ est une fonction entière, *d'ordre* [1] *plus petit que* 1, ce que nous supposerons, l'expression

$$\left[|c_0| + |c_1| n + |c_2| n^2 + \ldots + |c_p| n^p + \ldots\right]^{\frac{1}{n}}$$

---

[1] Les relations entre la distribution des zéros d'une fonction entière et la grandeur de la fonction ont été étudiées par MM. Poincaré et Hadamard, puis par M. Borel qui a défini et utilisé dans ces recherches la notion de l'*ordre* de la fonction [*Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX; *Comptes rendus*, 24 janvier 1898)]. Nous ne retiendrons de cette notion que ces deux points : l'ordre α d'une fonction entière $\sum a_n z^n$ est la plus grande des limites des termes $\left|\frac{\mathrm{L}\, n^n}{\mathrm{L}\, a_n}\right|$. Si l'on désigne par $\mathrm{M}(r)$ le maximum du module de la fonction pour $|z| = r$, l'ordre est la plus grande des limites de $\frac{\mathrm{LLM}(r)}{\mathrm{L}r}$ pour r infini. En d'autres termes, quel que soit α' supérieur à α on finit par avoir constamment $|a_n| < \frac{1}{n^{\frac{n}{\alpha}}}$ et $\mathrm{M}(r) < e^{r^{\alpha'}}$, et α est le plus petit nombre pour lequel cette propriété ait lieu.

a pour limite maximum, pour n infini, l'unité, et, par suite, les fonctions f remplissent aussi la troisième condition. Je dis que la quatrième est également vérifiée pour tout arc PQ du cercle de convergence, qui laisse en dehors le point singulier. A cet effet, nous utiliserons la relation

$$z\frac{d\,S_p(z)}{dz} = S_{p+1}(z) \tag{16}$$

qui nous permettra de trouver des limites successives des modules des S.

24. Soient d la distance d'un point z au point $+1$ et ρ le module de z. Je suppose, hypothèse vérifiée pour les premières valeurs de h, qu'il existe des constantes $M_1, \ldots, M_p$ telles que l'on ait, dès que $0 < h \leqq p$,

$$|S_h(z)| < \frac{M_h}{d^h} \qquad \text{si} \qquad d \leqq 1, \tag{17}$$

et

$$|S_h(z)| < \frac{M_h}{d} \qquad \text{si} \qquad d \geqq 1. \tag{18}$$

Je vais montrer qu'on peut trouver une nouvelle constante M_{p+1} de manière que les inégalités précédentes soient encore satisfaites pour $h = p+1$, et établir une relation simple entre les constantes M ainsi introduites.

Traçons, d'un point z, autre que 1, comme centre un cercle C de rayon δ inférieur à d et posons $d = \delta + \delta'$; comme la limite supérieure donnée pour le module d'une fonction $S_h(z)$ décroît quand z s'éloigne du point singulier, le maximum de $|S_p(z)|$ sur C est inférieur soit à $\frac{M_p}{\delta'^p}$, soit à $\frac{M_p}{\delta'}$ selon que δ' est plus petit ou plus grand que 1. Soit μ celle des deux quantités qu'il convient de choisir. On a donc au centre du cercle $\left|\frac{d\,S_p(z)}{dz}\right| < \frac{\mu}{\delta}$. Si $\delta' < 1$

$$\frac{\mu}{\delta} = \frac{M_p}{\delta\delta'^p}.$$

Or le maximum de $\delta\delta'^p$ a lieu pour $\delta = \frac{d}{p+1}$ et il est égal à

$$\frac{d^{p+1}}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^p.$$

Aussi *adoptons-nous* définitivement *comme rayon de* C *la longueur* $\frac{d}{p+1}$. Si $\frac{p}{p+1}d$ est inférieur à 1, nous aurons en vertu de l'égalité (16) et pour le centre du cercle

$$|S_{p+1}(z)| < \rho \frac{M_p(p+1)\left(1+\frac{1}{p}\right)^p}{d^{p+1}} < \rho e(p+1)\frac{M_p}{d^{p+1}}.$$

Si $\frac{p}{p+1}d$ est supérieur ou égal à 1, nous aurons l'inégalité

$$|S_{p+1}(z)| < \frac{M_p}{d}\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{\rho}{d}.$$

Or, dans le premier cas, ρ, et dans le second $\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{\rho}{d}$ restent finis; soit k une limite supérieure de ces quantités; si l'on désigne

$$M_p k e(p+1)$$

par M_{p+1}, on peut écrire soit

(19) $$|S_{p+1}(z)| < \frac{M_{p+1}}{d^{p+1}},$$

soit

(20) $$|S_{p+1}(z)| < \frac{M_{p+1}}{d}.$$

D'ailleurs, si d est supérieur, mais $\frac{p}{p+1}d$ inférieur à l'unité, de l'inégalité (18) qui a lieu on déduit *a fortiori* l'inégalité (20), de sorte que les relations (19) et (20) sont satisfaites dans les mêmes conditions que celles (17) et (18) qui avaient lieu par hypothèse.

Enfin, on peut trouver M_0 tel que

$$|S_0(z)| < \frac{M_1}{d} \quad \text{si} \quad d \geqq 1,$$

et

$$|S_0(z)| < M_0 \quad \text{si} \quad d \leqq 1.$$

Soit M le plus grand des deux nombres M_0 et M_1. On a, quel que soit p,

$$|f_p(z)| \leqq |c_0||S_0| + |c_1||S_1| + \ldots + |c_p||S_p| < \sum_{n=0}^{n=\infty} |c_n||S_n|.$$

Donc, si $d > 1$

$$(21) \quad |f_p(z)| < \frac{M}{d}\left\{|c_0| d + |c_1| + |c_2| 2!ek + \ldots + |c_n| n! e^{n-1} k^{n-1} + \ldots\right\},$$

et si $d \leqq 1$

$$(22) \quad |f_p(z)| < M\left\{\frac{|c_0|}{d} + \frac{|c_1|}{d} + \frac{|c_2|}{d^2} 2!ek + \ldots + \frac{|c_n|}{d^n} n! e^{n-1} k^{n-1} + \ldots\right\}.$$

Donc, dans une région où d a un minimum, l'ensemble des fonctions $f_p(z)$ admet pour les modules de ces fonctions une limite supérieure finie. Achevant alors le raisonnement comme au nº **19**, on conclut de même que la quatrième condition est vérifiée.

23. Formons à présent la différence $f_{n-1}(z) - f_n(z)$ ou $c_n S_n(z)$. Si γ est l'ordre de la série $\sum c_p t^p$, et si $\gamma < \gamma' < 1$, on finit par avoir constamment

$$|c_n| < \frac{1}{n^{\frac{n}{\gamma'}}},$$

le coefficient de z^p dans $c_n S_n$ est donc, du moins à partir d'un certain moment, inférieur en module à $\frac{p^n}{n^{\frac{n}{\gamma'}}}$. On voit aisément, en étudiant la racine $p^{\text{ième}}$ de cette expression, que, si s désigne un nombre quelconque, on pourra, afin d'avoir les polynomes de contact des fonctions f, faire varier p de n à $\varphi(n)$, $\varphi(n)$ ne dépassant pas $sn\,\mathrm{L}n$.

Ainsi, désignons par ν une fonction de n qui prend des valeurs entières au plus égales à n et telles que n soit inférieur à $s\nu L\nu$: *la série*

$$\sum_1^\infty n(c_0 + c_1 n + \ldots + c_\nu n^\nu) z^n$$

a le seul point singulier $+1$ *sur le cercle de convergence.*

26. Ces résultats se complètent comme ceux de l'application précédente, au n° **21**. Je me borne donc à énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Soient des nombres* $c_0, c_1, \ldots, c_p, \ldots$ *tels que la série* $\sum c_p t^p$ *définisse une fonction entière d'ordre plus petit que* 1, *et des fonctions*

$$g_1(t), \quad g_2(t), \quad \ldots, \quad g_n(t), \quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *On a, en ordonnant*

$$g_n(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n + \psi_n(t);$$

2° *Il existe un nombre* λ *supérieur à* 1, *tel que le rayon de convergence de la série* $g_n(t)$ *soit plus grand que* λn;

3° *Lorsqu'on fait décrire à* t *une circonférence dont le centre est à l'origine et dont le rayon est au moins égal à* λn, *la suite des modules des fonctions* $\psi_n(t)$ *a une limite supérieure finie.*

Le point $+1$ *est le seul point singulier de la série* $\sum g_n(n) z^n$ *sur le cercle de convergence.*

27. *Cas particulier.* — Les fonctions $g_n(t)$ peuvent être identiques; on a, dans ce cas, la série

$$\sum g(n) z^n,$$

$g(t)$ *étant une fonction entière d'ordre inférieur à l'unité.*

Exemples :

$$\sum (e^{\sqrt{n}} + e^{-\sqrt{n}}) z^n.$$

$$\sum P(n) z^n,$$

P étant un polynome. En combinant les applications II et III, on voit que l'on peut prendre $\sum F(n) z^n$, si F désigne une fraction.

28. On peut étendre un peu les énoncés des nos **26** et **27**. Désignons par $U(t)$ la fonction entière $\sum c_p t^p$. Nous l'avons supposée d'ordre plus petit que 1. Les conclusions trouvées subsistent *si* $U(t)$ *est d'ordre* 1, *pourvu que le maximum* P_r *de son module*, pour les valeurs de la variable de module r, *soit tel que* $P_r^{\frac{1}{r}}$ *ait pour plus grande limite l'unité* quand r devient infini. Posons

$$|c_p| = \left(\frac{u_p}{p}\right)^p;$$

je dis d'abord que u_p *tend vers* 0 *pour* p *infiniment grand*. En effet, on a quel que soit r

$$|c_p| < \frac{P_r}{r^p},$$

d'où

$$u_p < \frac{P_r^{\frac{1}{p}}}{\frac{r}{p}} = \frac{\left(P_r^{\frac{1}{r}}\right)^{\frac{r}{p}}}{\frac{r}{p}}.$$

Or, soit $\frac{r}{p} = r'$, Q un nombre positif fixe et r'' un nombre tel que

$$\left(P_r^{\frac{1}{r}}\right)^{r''} = Q.$$

Quand r croît indéfiniment, $P_r^{\frac{1}{r}}$ finit par rester inférieur à tout nombre supérieur à 1, donc r'' est infiniment grand; par suite, on peut choisir r'

de manière qu'il reste inférieur à r'', mais qu'il devienne infini ainsi que $\frac{r}{r'}$ ou p. Dès lors u_p qui est inférieur à $\frac{Q}{r'}$ tend vers 0.

Réciproquement, *si u_p tend vers 0, $P_r^{\frac{1}{r}}$ a pour plus grande limite l'unité.* On le voit sans peine en décomposant $\sum \left(\frac{u_p}{p}\right)^p r^p$ en deux parties : l'une contient les termes tels que $p \geqq r$, sa valeur est limitée; l'autre est un polynome dont le nombre de termes est au plus égal à r, et l'on prend la plus grande des puissances $\frac{1}{r}$ de chacun de ces termes, elle tend vers 1; donc, la proposition est établie. Ainsi, *il faut et il suffit que u_p tende vers 0 pour que la plus grande limite de $P_r^{\frac{1}{r}}$ soit* 1.

Nous plaçant dans cette hypothèse, nous constatons que les fonctions f satisfont encore à la troisième et à la quatrième condition, par les mêmes raisonnements qu'aux nos **23** et **24**. Quant à la cinquième, étudiée au no **25**, elle ne le sera que si l'on fait varier p de n à $\varphi(n)$, $\varphi(n)$ n'augmentant pas trop rapidement, *le mode de croissance maximum* dépend de la manière dont u_p tend vers 0. *Le théorème du no* **26** *ainsi que sa conséquence subsistent intégralement.*

29. *Remarque sur une extension de la méthode qui a fait l'objet des applications précédentes.* — La méthode exposée aux nos **14** et **15** peut être présentée d'une manière un peu plus large. Reprenons les mêmes séries et les quatre premières conditions. La cinquième peut être modifiée comme il suit :

Supposons qu'il existe deux fonctions $\psi(n)$, $\varphi(n)$ non décroissantes, la première infiniment grande avec n, la seconde dans un rapport avec la première qui reste supérieur à un nombre > 1, et telles enfin que dans les différences $f_{n+1}(z) - f_n(z)$ les termes dont le rang p est compris entre $\psi(n)$ et $\varphi(n)$ admettent comme termes majorants ceux d'une série fixe plus étendue, les polynomes de $f_n(z)$ et de $f_{n+1}(z)$ qui donnent lieu à ces différences seront encore dits *polynomes de contact.* Si l'on se représente les coefficients a_{pk} (notation du no **14**) figurés dans un Tableau à double entrée par des points dans les colonnes p et les lignes k, les coefficients des termes de contact sont situés dans une sorte de bande diagonale que l'on peut supposer

limitée par deux lignes brisées dont le contour va sans cesse vers le bas ou vers la droite. Soit $\mu(p)$ le nombre de coefficients situés dans cette bande et dans la colonne p, si $\mu(p)^{\frac{1}{p}}$ a pour limite supérieure l'unité pour p infini, la méthode des nos **14** et **15** s'applique, c'est-à-dire que, en choisissant au hasard dans les polynomes de contact le terme de rang p d'une nouvelle série, celle-ci est régulière le long de l'arc PQ. La démonstration est toute semblable à celle déjà faite. On choisit l'indice n' du terme étudié de rang n, de façon que, si n_1 est la plus grande valeur telle que $\nu(n_1)$ soit au plus égal à n, $\varphi(n_1)$ soit au moins égal à n'; alors les coefficients du terme étendu peuvent, par substitutions successives, être remplacés par ceux qui figurent dans f_{n_1}: d'ailleurs, la racine $n^{\text{ième}}$ du nombre des substitutions a pour plus grande limite l'unité; le raisonnement s'achève donc comme plus haut.

Cette remarque permettrait d'énoncer sous une forme plus générale les résultats des nos **20** et **25**. Nous ne nous y attarderons pas.

CHAPITRE II.

ÉTUDE, DANS LE PLAN, DES FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR DES SÉRIES DE TAYLOR.

---

1. *Exposé de la méthode.* — Soit une fonction $f(z)$ donnée par le développement $\Sigma a_p z^p$ convergent dans un cercle de rayon différent de o. Nous nous proposons de voir *si elle est holomorphe le long d'une ligne* $\mathcal{L}$ allant de l'origine à un certain point P. Pour étudier cette question, nous procéderons comme pour la recherche des points singuliers sur le cercle de convergence. Construisons des cercles de même rayon ρ, dont les centres O, O_1, O_2, ..., O_s sont situés sur $\mathcal{L}$, le dernier confondu avec P, la distance de deux centres successifs étant constamment égale à un nombre δ plus petit que ρ. D'après la notion même du prolongement analytique, pour que la fonction soit régulière le long de la ligne donnée, il faut et il suffit que l'on puisse

choisir la suite de cercles de manière que les développements de $f(z)$ relatifs aux centres successifs soient convergents pour les valeurs de la variable de module supérieur à ρ.

2. ρ étant donné, désignons par $\Sigma a_{n,k} z^n$ le développement, supposé possible, au point O_k $(a_{n0} = a_n)$. J'imagine $f(z)$ holomorphe dans les $h+1$ premiers cercles $C, C_1, C_2, \ldots, C_h$ et sur leurs contours, et j'appelle M_h le maximum du module de la fonction dans cette région. Le coefficient de z^n dans la série qui correspond au point O_{h+1} est fourni par une égalité de la forme

$$(1) \qquad a_{n,h+1} = c_n a_{n,h} + c_{n+1} a_{n+1,h} + \ldots;$$

les quantités $c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots$ ne dépendent pas de la fonction $f(z)$, mais de n et du segment $O_h O_{h+1}$.

Il s'agit à présent de voir quelle est *la plus grande des limites de* $\sqrt[n]{|a_{n,h+1}|}$ *pour n infini*. Or nous ferons, dans ce calcul, les deux modifications suivantes :

1° Nous ne prendrons dans l'expression de $a_{n,h+1}$ qu'un polynome

$$c_n a_{n,h} + c_{n+1} a_{n+1,h} + \ldots + c_{\varphi_{h+1}(n)} a_{\varphi_{h+1}(n),h},$$

$\varphi_{h-1}(n)$ désignant une certaine fonction de n, qui prend des valeurs entières en même temps que n.

2° Nous ne supposerons pas connues les quantités

$$a_{n,h}, \quad a_{n-1,h}, \quad \ldots, \quad a_{\varphi_{h+1}(n),h}$$

et nous leur substituerons des valeurs approchées

$$a'_{n,h}, \quad a'_{n+1,h}, \quad \ldots, \quad a'_{\varphi_{h-1}(n),h},$$

de sorte que nous aurons une valeur approchée de $a_{n,h+1}$, soit $a'_{n,h+1}$, fournie par l'égalité

$$(2) \qquad a'_{n,h+1} = c_n a'_{n,h} + c_{n+1} a'_{n+1,h} + \ldots + c_{\varphi_{h-1}(n)} a'_{\varphi_{h-1}(n),h}.$$

3. Posons en général

$$a_{k,h} = a_{k,h} + a_{k,h}$$

et

$$a_{k,h+1} = a'_{k,h+1} + a''_{k,h+1}.$$

Nous allons chercher une limite supérieure de $|a_{n,h+1}|$, en supposant que, à partir d'une certaine valeur de n, on a

$$|a''_{n,h}| < \lambda''_h,$$

λ_h étant une certaine constante. L'erreur $a''_{n,h+1}$ est la somme de deux expressions.

Première expression :

$$c_{1+\varphi_{h+1}(n)} a_{1+\varphi_{h+1}(n),h} + \ldots + c_q a_{q,h} + \ldots = \varepsilon'_{n,h}.$$

Reportons-nous au calcul analogue fait au Chapitre I, n° 4.

Ici $|a_{p,h}| < \frac{M_h}{\rho^p}$, quel que soit p; ξ est remplacé par $\frac{\varphi_{h+1}(n)}{n}$, t par $\frac{1}{\rho}$, enfin $|b|$ par δ, en sorte que la condition pour la convergence de la progression géométrique de raison $\lambda|b|$ qu'on avait eu à considérer devient ici, en désignant par k un nombre positif, plus petit que 1,

$$(3) \qquad \frac{\frac{\varphi_{h+1}(n)}{n} + 1}{\frac{\varphi_{h+1}(n)}{n} - 1} \frac{\delta}{\rho} < k.$$

La quantité que nous avions appelée A était le maximum de

$$\frac{x^x}{(x-1)^{x-1}} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

quand n allait de ξ à $\xi + 1$. Or, avec nos notations nouvelles, la première fraction est inférieure à

$$e\left[\frac{\varphi_{h+1}(n)}{n} + 1\right].$$

On conclut aisément de là, d'après l'expression finale trouvée alors comme limite supérieure des termes négligés, que si l'on choisit *un*

nombre θ un peu plus grand que 1, on a constamment, à partir d'une certaine valeur de n,

$$(4) \qquad |\varepsilon'_{n,h}|^{\frac{1}{n}} < \theta M_h^{\frac{1}{n}} e\left[\frac{\varphi_{h+1}(n)}{n} + 1\right] \times \frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{\varphi_{h+1}(n)}{n} - 1}.$$

M_h est dans le second membre *la seule quantité* qui dépende de la série $\Sigma a_{ph} z^p$.

4. *Seconde expression :*

$$c_n a_{n,h} + c_{n+1} a''_{n+1,h} + \ldots + c_{\varphi_{h+1}(n)} a_{\varphi_{h+1}(n),h} = \varepsilon_{n,h}.$$

On a

$$|\varepsilon''_{n,h}| < |c_n| \lambda_h^n + |c_{n+1}| \lambda_h^{n+1} + \ldots + |c_p| \lambda_h^p + \ldots.$$

Mais, *si je suppose*

$$(5) \qquad \lambda_h < \frac{1}{\delta},$$

la série du second membre est convergente et sa racine $n^{\text{ième}}$ a, d'après la règle de Cauchy, pour limite

$$\frac{1}{\frac{1}{\lambda_h} - \delta}.$$

On a donc

$$(6) \qquad |\varepsilon_{n,h}|^{\frac{1}{n}} < \frac{\theta \lambda_h}{1 - \delta \lambda_h},$$

θ ayant la même signification que ci-dessus. Cette inégalité a lieu certainement à partir d'une certaine valeur de n qui dépend de θ et de $\delta \lambda_h$.

5. Les limites que l'on vient de trouver vont nous permettre de faire dépendre les unes des autres les erreurs commises dans le calcul des coefficients des développements de Taylor que nous sommes amenés à construire successivement.

Soit λ_{h+1} une quantité fixe. Si nous voulons que l'on ait

$$|a''_{n,h+1}| < \lambda^n_{h+1}$$

à partir d'une certaine valeur de n, il suffit que l'on ait séparément

$$(7) \qquad |\varepsilon'_{n,h}| < (\theta\mu\lambda_{h+1})^n,$$

$$(8) \qquad |\varepsilon''_{n,h}| < (\theta\mu\lambda_{h+1})^n,$$

$\mu\theta$, et par suite μ, étant un peu inférieur à 1.

6. L'inégalité (8) sera vérifiée, en vertu de la relation (6), si l'on a

$$(8') \qquad \lambda_h \leqq \frac{\mu\lambda_{h+1}}{1+\mu\,\delta\lambda_{h+1}}.$$

Quand cette inégalité a lieu, λ_h est inférieur à λ_{h+1}. Or *il convient évidemment de diriger le calcul de manière que les quantités négligées dans la détermination des coefficients d'une série n'empêchent pas de constater si cette série a un rayon de convergence supérieur à* ρ. Pour atteindre ce but, il suffit, en désignant d'une manière générale par a''_{np} l'erreur commise sur le coefficient a_{np}, que l'on puisse faire correspondre à chaque centre O_p une valeur λ_p au plus égale à $\frac{\mu}{\rho}$ et telle que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de n,

$$|a''_{n,p}| < \lambda^n_p.$$

En prenant

$$(9) \qquad \lambda_p = \frac{\mu^{s-p+1}}{\rho\left[1+(s-p)\frac{\delta}{\rho}\right]},$$

tous les λ sont inférieurs à $\frac{\mu}{\rho}$, sauf λ_s qui est précisément égal à $\frac{\mu}{\rho}$ et qu'il n'y a d'ailleurs pas lieu de considérer; de plus, *l'inégalité* (8') *est constamment vérifiée.* D'ailleurs, *la relation* (5) *a bien lieu* a fortiori, δ étant inférieur à ρ.

7. La condition (7) sera satisfaite également, si l'on a, outre la

relation (3), la suivante :

$$(7') \qquad M_h^{\frac{1}{n}} e\left[\frac{\varphi_{h+1}(n)}{n}+1\right]\frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{\varphi_{h+1}(n)}{n}-1} \leq \frac{\mu^{s-h+1}}{\rho+(s-h-1)\delta}.$$

Posons

$$(10) \qquad \frac{\varphi_h(n)}{n} - 1 = \psi(s-h);$$

ψ ne dépendra pas de n ; puis, remplaçons dans (7′) h par $h-1$. *Si l'on reste dans une région où les M_h ont une limite supérieure finie*, et si l'on désigne par Q une certaine constante, l'inégalité (7′) pourra s'écrire

$$(11) \qquad \frac{\rho+(s-h)\delta}{\rho}\left[\psi(s-h)+2\right]\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\psi(s-h)}\frac{1}{\mu^{s-h}} \leq Q.$$

Les ψ sont assujettis à rester supérieurs à un nombre fixe ; ε et η étant deux nombres positifs arbitrairement choisis, nous imposerons aux ψ la double inégalité

$$(12) \qquad \varepsilon(s-h) < \psi(s-h) < \eta(s-h).$$

Mais $s\delta$ est sensiblement égal à la longueur l de $\mathcal{L}$ et ρ est petit. Il suffira donc, pour vérifier l'inégalité (11), que l'on ait

$$(12') \qquad \frac{[2+\eta(s-h)]}{\rho}\left[\frac{l^{\varepsilon}}{(s\rho)^{\varepsilon}\mu}\right]^{s-h} \leq Q \text{ (}^1\text{)},$$

ou

$$(13) \qquad \frac{(s-h)}{\rho}\,\frac{g^{s-h}}{(s\rho)^{\varepsilon(s-h)}} \leq R,$$

g et R étant des constantes.

Or, pour une valeur donnée de ρ, *il existe une valeur de s à partir de laquelle cette relation a lieu* pour toutes les valeurs de h : 0, 1, 2, ..., $s-1$, *ainsi*, bien entendu, *que la relation* (3).

([1]) En toute rigueur, il faudrait remplacer l par une quantité un peu plus grande, mais ceci est sans importance.

Ainsi, l'inégalité (7') ou (13) détermine [conjointement avec l'inégalité (3)] un minimum de s en fonction de ρ, *si l'on connaît une limite supérieure des* M_h; quant aux λ_p, ils sont fixés par les relations (9), les a_{n0} étant connus exactement, la première valeur λ_n donnée par la formule est acceptable.

8. Cela posé, je considère les polynomes que nous avons à former pour trouver les valeurs approchées $a'_{n1}, a'_{n2}, \ldots, a'_{np}, \ldots$ des coefficients de la puissance n de la variable, et j'imagine que dans chacun d'eux on remplace les a' qui y figurent par les polynomes qui les expriment eux-mêmes en fonction des coefficients approchés des séries précédentes. Finalement, nous aurons donc des relations de la forme

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} a'_{n1} = \alpha_{n,1,n} a_n + \alpha_{n+1,1,n} a_{n+1} + \ldots + \alpha_{\chi_1(n),1,n} a_{\chi_1(n)}, \\ a'_{n2} = \alpha_{n,2,n} a_n + \alpha_{n+1,2,n} a_{n+1} + \ldots + \alpha_{\chi_2(n),2,n} a_{\chi_2(n)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{np} = \alpha_{n,p,n} a_n + \alpha_{n+1,p,n} a_{n+1} + \ldots + \alpha_{\chi_p(n),p,n} a_{\chi_p(n)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

On a

$$\begin{array}{l} \chi_1\ (n) < n[1 + \eta(s-1)], \\ \chi_2\ (n) < n[1 + \eta(s-1)][1 + \eta(s-2)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \chi_{s-1}(n) < n[1 + \eta(s-1)][1 + \eta(s-2)]\ldots(1+\eta). \end{array}$$

Soit $\theta(s)$ le premier nombre entier supérieur à

$$[1 + \eta(s-1)][1 + \eta(s-2)]\ldots(1+\eta);$$

les nombres $\chi(n)$ sont donc tous inférieurs à $n\theta(s)$.

9. Dès lors, si l'on considère une fonction n' de n, prenant des valeurs entières avec n et telle que $\frac{n'}{n}$ devienne, en même temps que n, infiniment grand, il arrivera un moment à partir duquel, pour des

valeurs données de ρ et de s, on aura constamment

$$n' > n\theta(s),$$

et, par suite, n' *restera supérieur aux fonctions* $\chi(n)$.

10. Si la fonction $f(z)$ est holomorphe le long de $\mathfrak{L}$, son module admet, dans une région comprenant $\mathfrak{L}$ à son intérieur, un maximum, et l'on peut trouver une suite de cercles, de rayon ρ assez petit, telle que $f(z)$ soit holomorphe dans des cercles concentriques à ceux-là, et de rayon plus grand que $\frac{\rho}{\mu'}$, μ' étant supérieur à μ, mais inférieur à 1. Donc, si l'on choisit cette suite de cercles de manière que s soit suffisamment grand, comme il est indiqué au nº **7**, *les racines* $n^{\text{ièmes}}$ *des valeurs absolues des expressions* (14) *ont, pour* n *infini, des plus grandes limites inférieures à* $\frac{\mu'}{\rho}$.

Inversement, supposons que l'on forme des suites de cercles C_0, C_1, C_2, ..., C_{s-1}, telles que, pour chaque valeur de ρ inférieure à un nombre ρ_1 et pour les valeurs de s supérieures alors à un nombre qui dépend de ρ, les racines n^{iemes} des modules des expressions (14) aient leurs plus grandes limites inférieures à $\frac{\mu'}{\rho}$, μ' étant une quantité positive quelconque plus petite que 1, *la fonction* $f(z)$ *est holomorphe le long de* $\mathfrak{L}$. En effet, choisissons $\mu < \mu'$; puis considérons une des files de cercles, définie par le rayon ρ et le nombre s. La fonction $f(z)$ commence par s'étendre de cercle en cercle, et il en sera ainsi jusqu'au point P, *à moins que le maximum du module de la fonction dans la région acquise* ne s'accroisse tellement que s ne soit plus aussi grand qu'il est requis au nº **7**.

Alors, *sans changer* ρ, *augmentons* s; $f(z)$ s'étend de nouveau dans les cercles voisins. Mais on peut craindre que *le maximum du module de* $f(z)$ *ne croisse si vite qu'il faille faire croître à son tour* s *indéfiniment*. Peut-être alors les cercles, se resserrant de plus en plus, ne pourraient-ils dépasser une position limite Γ? *Cela n'est pas.* $f(z)$ ne deviendra pas infini sur un pareil cercle Γ. Soit, en effet, Γ' un cercle qui *précède* Γ, la distance des centres étant inférieure à

$\frac{\rho}{\mu'} - \rho$. Le cercle Γ' est atteint par $f(z)$ dans son prolongement, et $f(z)$ est holomorphe dans un cercle concentrique à Γ' et de rayon $\frac{\rho}{\mu'}$, *donc sur* Γ. De proche en proche, la fonction s'étend donc jusqu'au point P.

11. Ainsi, la possibilité du prolongement de la série le long d'une ligne $\mathfrak{L}$ dépend des limites supérieures des expressions $|a'_{np}|^{\frac{1}{n}}$ fournies par les formules (14). Ces expressions ne font intervenir que certains coefficients a_h, ceux que l'on obtient en faisant varier h depuis n jusqu'à $\chi_1(n), \ldots, \chi_{s-1}(n)$. Or nous avons vu au nº 9 que si n' est une fonction de n, infiniment grande avec n, les expressions χ finissent par être inférieures à n', quelle qu'ait été la valeur prise pour ρ. Donc, une pareille fonction n' étant choisie, si l'on appelle *$n^{ième}$ ensemble des coefficients de la série* $\Sigma a_p z^p$, l'ensemble $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n'}$, on peut dire que *le problème posé ne dépend que de la suite de ces ensembles.*

Les polynomes (14) jouent dans l'étude de la fonction $f(z)$ le long de $\mathfrak{L}$ un rôle semblable à celui du terme général pour la convergence. Nous les appellerons *termes généraux étendus de rang n*, et n' sera leur *indice;* ainsi se poursuit l'analogie de l'étude actuelle avec celle faite dans le premier Chapitre. La suite de cercles auxiliaires donnant lieu à ces termes généraux sera dite *suite de cercles associée à* $\mathfrak{L}$, et leur rayon le *rayon associé*. Les termes généraux étendus dépendent de la suite de cercles associée. Il sera souvent inutile de spécifier quelle est cette suite, et il sera entendu, à moins d'indication différente, qu'on suppose ρ arbitraire, mais aussi petit que l'on veut, et s suffisamment grand par rapport à ρ.

Ainsi, la différence essentielle entre le résultat auquel nous parvenons et celui qui a été établi au Chapitre I, c'est que le rapport de l'indice des termes généraux étendus, à leur rang, devient infini avec n, tandis qu'il suffisait alors de laisser ce rapport supérieur à un nombre fixe plus grand que 1. Nous avons maintenant un critérium pour l'étude d'une fonction dans les différentes régions du plan. Ici encore, *nous utiliserons ce critérium par la comparaison de la série donnée avec d'autres séries définissant des fonctions déjà connues.*

Nous nous bornerons à former des développements représentant des fonctions holomorphes dans certaines parties du plan.

12. *Formation de fonctions holomorphes dans certaines régions du plan.* — La méthode exposée Chapitre I, n° **14**, s'applique ici avec quelques modifications.

Soit une ligne $\mathcal{L}$ issue de l'origine, et supposons que l'on ait des séries

$$f_1(z) = \Sigma a_{p1} z^p, \quad f_2(z) = \Sigma a_{p2} z^p, \quad \ldots, \quad f_k(z) = \Sigma a_{pk} z^p, \quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Elles représentent des fonctions holomorphes dans une aire qui comprend $\mathcal{L}$, les distances des points de la ligne au contour de l'aire admettent un minimum différent de zéro;

2° Les modules des fonctions ont, dans la région considérée, une limite supérieure finie M;

3° Dans les différences $f_{n+1}(z) - f_n(z)$ les termes dont le rang varie de n à $\varphi(n)$, $\frac{\varphi(n)}{n}$ devenant infiniment grand avec n, admettent comme termes majorants ceux d'une certaine série fixe $\Sigma h^p z^p$, convergente dans un cercle qui comprend $\mathcal{L}$ à son intérieur ([1]).

Ces conditions seront dites les *conditions fondamentales*.

Prenons une fonction n' de n, entière avec n, non supérieure à $\varphi(n)$, non décroissante, telle que $\frac{n'}{n}$ soit infiniment grand avec n et que $\sqrt[n]{n'}$ ait 1 pour plus grande limite. Nous substituerons cette fonction à $\varphi(n)$, à laquelle elle peut d'ailleurs se trouver identique. Reprenant notre comparaison du Chapitre précédent, nous pourrons donc dire que les f forment une famille de séries tangentes le long des polynomes formés pour f_n et f_{n+1} des termes dont l'indice va de n à n'. *Toute série dont les termes sont des termes des polynomes de contact est holomorphe le long de $\mathcal{L}$.*

Il est inutile de reprendre en détail le raisonnement fait dans des

([1]) Comme au n° 29 du Chapitre I, cette dernière condition pourrait être remplacée par une autre plus large; nous ne nous en occuperons pas.

circonstances analogues. Je me borne à remarquer qu'il existe à coup sûr une infinité de suites de cercles associés, dans les conditions du n° **10**, telles que pour chacune de ces suites et pour chaque cercle qui en fait partie, les racines $n^{\text{ièmes}}$ des modules des termes généraux étendus des diverses séries, considérées à la fois, aient *simultanément* pour plus grande limite au plus le produit de l'inverse du rayon associé par un nombre plus petit que 1. Cela résulte de suite de l'existence du maximum M des modules. De plus, cette propriété a lieu, quelle que soit la forme des termes généraux étendus; elle s'applique aussi aux coefficients mêmes des développements successifs relatifs aux centres des cercles associés.

12. *Première application : Séries dont les coefficients de rang n sont certaines fonctions de* $\frac{1}{n}$. — Reprenons (Chapitre I, n° **18**) les séries

$$(15)\qquad S_p(z) = \frac{z}{1^p} + \frac{z^2}{2^p} + \ldots + \frac{z^n}{n^p} + \ldots,$$

p parcourant les valeurs entières et positives, et posons

$$(16)\qquad \begin{cases} f_0(z) = c_0 S_0(z), \qquad f_1(z) = c_0 S_0 + c_1 S_1, \qquad \ldots, \\ \qquad f_p(z) = c_0 S_0 + \ldots + c_p S_p, \qquad \ldots, \end{cases}$$

les c étant des constantes telles que la série

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_p t^p + \ldots$$

ait un rayon de convergence, r, différent de o.

En nous reportant au numéro cité, nous constatons que les fonctions f satisfont à la première et à la seconde condition fondamentale *pour toute ligne* $\mathfrak{L}$ *qui n'a aucun point commun avec la portion de l'axe des quantités réelles allant de* $+1$ *à* $+\infty$.

Il est d'ailleurs aisé de lever cette restriction. Imaginons que l'aire A (Chapitre I, n° **19**) soit telle qu'on puisse arriver en chacun de ses points en suivant une ligne située à son intérieur, issue de l'origine, et telle que le cosinus de l'angle que fait la tangente en un point quel-

conque avec le rayon vecteur aboutissant en ce point reste supérieur à un nombre fixe k. Alors, en intégrant le long d'une pareille ligne, on aura, si l'on suppose

$$|\varepsilon_p(z)| < \frac{M_p \rho^h}{k^p},$$

l'inégalité

$$\left|\int_0^z \frac{\varepsilon_p(z)}{z} dz\right| < \frac{1}{k} \int_0^z \frac{M_p \rho^{h-1}}{k^p} d\rho,$$

et par suite il suffit, dans le calcul déjà fait, de remplacer la relation $M_p = \frac{M_0}{h^p}$ par la suivante : $M_p = M_0 \frac{1}{(hk)^p}$, ce qui n'en modifie pas les conséquences. Ainsi, *la ligne $\mathfrak{L}$ est simplement assujettie à ne pas passer par le point* $+1$.

Soit R le rayon (supérieur à 1) d'un cercle dont le centre est à l'origine et à l'intérieur duquel est située la courbe $\mathfrak{L}$; la troisième condition fondamentale sera remplie si l'on prend comme termes du n^{ieme} polynome de contact ceux dont le rang va de n à un nombre plus petit que $\frac{n \operatorname{L} n}{\operatorname{L} \frac{1}{R}}$.

Ainsi, si l'on désigne par ν une fonction de n prenant des valeurs entières au plus égales à n et telles que n soit inférieur à $\frac{\nu \operatorname{L} \nu}{\operatorname{L} \frac{1}{R}}$, *la série*

$$F(z) = \sum_1^\infty {}_n \left(c_0 + \frac{c_1}{n} + \ldots + \frac{c_\nu}{n^{\nu_1}}\right) z^n$$

n'a à l'intérieur d'un cercle de rayon R *pas d'autre point singulier que* $+1$. La fonction ainsi définie n'est d'ailleurs pas, en général, uniforme dans ce cercle.

15. Au lieu de laisser R constant, on peut le faire croître indéfiniment. Dans la formation du n^{ieme} polynome de contact, ne faisons varier l'indice p du rang que de n à un nombre $n' = \varphi(n)$ et tel que $\frac{\varphi(n)}{n \operatorname{L} n}$ tende vers 0. Alors, si dans $F(z)$, n est compris entre ν et $\varphi(\nu)$, la fonction obtenue n'a, *dans un cercle quelconque de centre* O, que

le point $+1$ comme point singulier. Il suffit, par exemple, de prendre $\varphi(n) = n(\mathrm{L}n)^\mu$ $(\mu < 1)$.

14. On peut encore compléter ces résultats. Il suffit de remplacer dans l'énoncé du n° **21** (Chapitre I) $\frac{\lambda}{n}$ par $\frac{1}{n\varepsilon_n}$, ε_n tendant vers o pour n infini. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Soient des nombres $c_0, c_1, \ldots, c_p, \ldots$ tels que la série $\Sigma c_p t^p$ ait un rayon de convergence différent de o, et des fonctions*

$$g_0(t) \quad g_1(t), \quad \ldots, \quad g_n(t), \quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *On a, en ordonnant,*

$$g_n(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n + \psi_n(t);$$

2° *Il existe une quantité infiniment petite ε_n telle que le rayon de convergence de $g_n(t)$ soit supérieur à $\frac{1}{n\varepsilon_n}$;*

3° *Lorsque t décrit pour les valeurs croissantes de n des circonférences dont le centre est à l'origine et dont le rayon est au moins égal à $\frac{1}{n\varepsilon_n}$, la suite des modules des fonctions $\psi_n(t)$ correspondantes a une limite supérieure finie.*

Le point $+1$ est le seul point singulier à distance finie de la fonction $\sum g_n\left(\frac{1}{n}\right) z^n$.

15. *Cas particulier.* — Les fonctions $g_n(t)$ peuvent être identiques; on a dans ce cas la série $\sum g\left(\frac{1}{n}\right) z^n$, *$g(t)$ étant holomorphe à l'origine* (on supprime au besoin les premiers coefficients de la série en z).

Les exemples déjà cités Chapitre I conviennent donc encore :

$$\sum \frac{n-1}{n^2+1} z^n, \qquad \Sigma e^{\frac{1}{n}} z^n.$$

16. *Seconde application : Séries dont les coefficients de rang n sont certaines fonctions de n.* — Il s'agit d'une extension au cas du plan de la troisième application, Chapitre I (nos **25** et suivants). Les raisonnements ne subissent que des modifications fort simples. Aussi ne ferons-nous que les indiquer.

Soient p un entier non négatif, et la série

$$(17) \qquad S_p(z) = 1^p z + 2^p z^2 + \ldots + n^p z^n + \ldots.$$

Si l'on pose

$$(18) \quad f_0(z) = c_0 S_0(z), \quad \ldots, \quad f_p(z) = c_0 S_0 + c_1 S_1 + \ldots + c_p S_p, \quad \ldots$$

et si les c sont des constantes telles que la fonction $\sum_{p=1}^{p=\infty} c_p t^p$ soit entière, *d'ordre γ plus petit que* 1, les fonctions f satisfont aux deux premières conditions fondamentales pour toute ligne $\mathcal{L}$ qui ne passe pas par le seul point singulier de ces fonctions, $+1$. Cela résulte immédiatement des limites supérieures trouvées pour les $S(z)$ au no **24**, Chapitre I.

De plus, la troisième condition est également vérifiée, si pour le $n^{\text{ième}}$ polynome de contact, on se borne à faire varier le rang p des termes de ce polynome depuis n jusqu'à $\dfrac{n\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\mathrm{L}n}{\mathrm{LR}}$ au plus, R étant le rayon d'un cercle de centre O et qui comprend $\mathcal{L}$ à son intérieur.

Supposons donc que ν soit une fonction de n, prenant des valeurs entières en même temps que la variable et telle que

$$\nu \leqq n \leqq \frac{\nu\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\mathrm{L}\nu}{\mathrm{LR}};$$

la série

$$\mathrm{F}(z) = \sum_1^\infty n(c_0 + c_1 n + \ldots + c_\nu n^\nu) z^n$$

n'a que le point singulier $+1$ *à l'intérieur d'un cercle de rayon* R.

La fonction ainsi définie est uniforme dans le cercle. On peut, en effet, écrire son développement

$$c_0 S_0(z) + c_1[S_1(z) - P_1(z)] + c_2[S_2(z) - P_2(z)] + \ldots$$

les P étant des polynomes; or les $S(z)$ sont des fonctions uniformes.

17. $F(z)$ n'aura à distance finie qu'un point singulier, si, au lieu de laisser R constant, nous le faisons devenir infini avec n. Il suffira, par exemple, dans l'énoncé de la propriété précédente, d'imposer à ν les conditions

$$\nu \leqq n \leqq \nu(L\nu)^\mu \qquad (\mu < 1).$$

18. Enfin, je me borne à énoncer le théorème suivant, qui est l'analogue de celui du n° **26**, Chapitre I :

Théorème. — *Soient des nombres c_0, c_1, ..., c_p, ... tels que la série $\sum c_p t^p$ soit une fonction entière d'ordre inférieur à 1, et des fonctions*

$$g_0(t), \quad g_1(t), \quad \ldots, \quad g_n(t), \quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *On a, en ordonnant,*

$$g_n(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n + \psi_n(t);$$

2° *Il existe une variable infiniment petite ε_n telle que le rayon de convergence de $g_n(t)$ soit supérieur à $\frac{n}{\varepsilon_n}$;*

3° *Lorsque t décrit, pour les valeurs croissantes de n, des circonférences dont le centre est à l'origine et dont le rayon est au moins égal à $\frac{n}{\varepsilon_n}$, les modules des fonctions $\psi_n(t)$ correspondantes ont une limite supérieure finie.*

Le point $+1$ est le seul point singulier à distance finie de la fonction $\sum g_n(n) z^n$.

19. *Cas particulier.* — Les fonctions $g_n(t)$ peuvent être iden-

tiques. On a, dans ce cas, la série $\Sigma g(n)z^n$, $g(t)$ *étant une fonction entière d'ordre inférieur à* 1.

Les exemples donnés au n° **27**, Chapitre I, sont encore valables.

20. *Cas où la fonction entière* $\Sigma c_p t^p$ *est d'ordre* 1. — Nous avons vu au Chapitre précédent, n° **28**, qu'il y a lieu également de considérer le cas où la fonction $U(t) = \Sigma c_p t^p$ est d'ordre 1.

Supposons que $p|c_p|^{\frac{1}{p}}$ tende vers o pour p infini, c'est-à-dire que la plus grande des limites de $P_r^{\frac{1}{r}}$ pour r infiniment grand soit l'unité, P_r étant le module maximum de $U(t)$ pour $|t|=r$. Alors, la seule modification à faire aux conclusions des paragraphes précédents a trait au rang p des termes qui figurent dans le $n^{\text{ième}}$ polynome de contact. Si nous voulons définir une fonction n'ayant à l'intérieur d'un cercle de rayon R qu'un point singulier, il nous suffira de ne faire varier p que de n jusqu'à $\dfrac{n\,L\dfrac{1}{n|c_n|^{\frac{1}{n}}}}{LR}$.

Le résultat est particulièrement intéressant si l'on considère une fonction $\Sigma g(n)z^n = F(z)$, où $g(t)$ désigne une fonction entière d'ordre 1, dont les modules maxima pour $|t|=r$, élevés à la puissance $\frac{1}{r}$, ont l'unité pour plus grande limite : $F(z)$ a le seul point singulier $+1$ à distance finie.

21. *Observation au sujet des applications précédentes.* — En modifiant légèrement les calculs qui précèdent, on peut construire des fonctions ayant d'autres points singuliers.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ des quantités réelles quelconques telles que les points du cercle de convergence ne soient pas tous des points de l'ensemble $e^{2i\pi\varphi_1}, e^{2i\pi\varphi_2}, \ldots$ ou de son dérivé.

Si l'on substitue aux fonctions $S_p(z)$ des applications I et II, soit les séries

$$\frac{e^{-2i\pi\varphi_p}}{1^p}z + \frac{e^{-4i\pi\varphi_p}}{2^p}z^2 + \ldots + \frac{e^{-2ni\pi\varphi_p}}{n^p}z^p + \ldots,$$

soit les séries

$$1^p e^{-2i\pi\varphi_p}z + 2^p e^{-4i\pi\varphi_p}z^2 + \ldots + n^p e^{-2ni\pi\varphi_p}z^p + \ldots,$$

on voit immédiatement que les raisonnements que nous avons faits ne subissent aucune modification; ils s'appliquent à toute aire finie, contenant l'origine et laissant à son extérieur les points $e^{2i\pi\varphi_1}$, ... et leurs points limites. Mais les fonctions que nous formons ont, du moins en général, les points de cet ensemble comme points singuliers.

Enfin, on obtiendrait une généralisation plus étendue par l'introduction de points singuliers $\sigma_p e^{2i\pi\varphi_p}$ distribués arbitrairement dans le plan.

22. *Autres séries.* — Voici une remarque fort simple : soient des constantes $u_1, u_2, u_3, \ldots$ et les expressions $\psi(n) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$; la fonction $\Sigma\psi(n)z^n$ n'a d'autres points singuliers que ceux de la fonction $\Sigma u_n z^n$ et le point $+1$, puisque l'on a

$$\Sigma\psi(n)z^n = \frac{\Sigma u_n z^n}{1-z}.$$

Cela posé, désignons par $g(t)$ une fonction holomorphe à l'origine, et prenons $\psi(n) = \mathrm{L}\,g\left(\frac{1}{n}\right)$, il vient

$$\psi(n+1) - \psi(n) = u_{n+1} = \mathrm{L}\,\frac{g\left(\frac{1}{n+1}\right)}{g\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Donc u_{n+1} est une fonction holomorphe de $\frac{1}{n}$ à l'origine, et par suite $\Sigma u_n z^n$ n'a *pas d'autre point singulier que* $+1$ *à distance finie : il en est de même de* $\Sigma\mathrm{L}\,g\left(\frac{1}{n}\right)z^n$.

Exemples :

1° $$\Sigma\mathrm{L}\sin\frac{1}{n}z^n;$$

2° $$\sum\mathrm{L}\frac{1}{n}z^n \quad \text{et, par conséquent,} \quad \Sigma\mathrm{L}\,n\,z^n.$$

23. *Extension d'un théorème de M. Hadamard à l'étude des séries de Taylor.* — Le théorème dont il s'agit est le suivant :

Si l'on pose

(19) $$\varphi(z) = \Sigma a_n z^n,$$

(20) $$\psi(z) = \Sigma b_n z^n$$

et

(21) $$f(z) = \Sigma a_n b_n z^n,$$

la fonction $f(z)$ ne peut pas avoir d'autres points singuliers que ceux dont les affixes sont le produit des affixes de deux points singuliers, l'un de φ, l'autre de ψ.

M. Borel (¹) a montré que si φ et ψ sont uniformes dans le voisinage de deux de leurs points singuliers respectifs α et β supposés isolés, f est uniforme dans le voisinage du point $\alpha\beta$.

24. Nous allons utiliser ces propriétés pour la formation de séries dont les singularités nous seront connues.

Désignons par $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, ... les séries $\Sigma a_n^2 z^n$, $\Sigma a_n^3 z^n$, ... Si l'on remplace successivement $\psi(z)$ par $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, ..., $f(z)$ devient tour à tour $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, $\varphi_4(z)$, ... Ainsi donc, une série de la forme $\Sigma P(a_n) z^n$, où P désigne un polynome de degré k, représente une fonction qui n'admet comme singularités que les valeurs singulières α de $\varphi(z)$, leurs produits deux à deux, trois à trois, ..., k à k. Cherchons à remplacer le polynome P par une fonction entière.

A cet effet, considérons l'ensemble E des points singuliers de φ, et tous ceux E_1, E_2, ... que l'on en déduit par l'application répétée du procédé indiqué, enfin l'ensemble $\mathcal{E}$ qui les comprend tous, ainsi que leurs points limites. Si l'un des points de E était à une distance de l'origine moindre que l'unité, l'origine serait un point de $\mathcal{E}$; *nous écarterons ce cas.*

25. Les seuls points singuliers possibles des fonctions φ_2, φ_3, ... appartiennent à $\mathcal{E}$.

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVI, n° 10.

Or, si l'on désigne par C un contour qui comprend l'origine, z et les points $\frac{z}{\alpha}$ et qui laisse les points β à l'extérieur, on a la formule

$$(22) \qquad f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C} \psi(x)\varphi\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{x}.$$

Si nous remplaçons ψ par l'une quelconque des fonctions φ_p, la formule précédente sera donc valable si le contour C laisse à distance finie à l'extérieur, non plus les points β relatifs à *une* fonction particulière φ_h, mais *tous les points* γ de l'ensemble $\mathcal{E}$. Construisons une aire à contour simple, telle que, ce contour étant le contour d'intégration, la formule (22) donne $f(z)$ (dans l'espèce, φ_{p+1}, p étant quelconque) pour tout point de l'aire. Il est évident qu'on peut y arriver de la manière suivante : Partons d'une aire A à contour simple, contenant l'origine et laissant les points γ à l'extérieur. Toutes les aires $\frac{A}{\gamma}$, déduites chacune de A en divisant par un nombre γ les affixes de tous les points de A, seront dans les mêmes conditions. L'ensemble de ces surfaces (et de leurs points limites, si certaines suites formées par elles en admettent) constitue une aire $\mathcal{A}$ d'un seul tenant et jouissant aussi des mêmes propriétés que A ; d'ailleurs, si z est dans cette aire, $\frac{z}{\alpha}$ s'y trouve également. Donc la formule (22) s'applique à tout point intérieur à $\mathcal{A}$.

Observons maintenant que toute aire B intérieure à A donne naissance à une aire $\mathcal{B}$ intérieure à $\mathcal{A}$.

26. Cela posé, la relation (22) va nous permettre de trouver pour les points d'aires successives, très voisines, mais intérieures les unes aux autres, des limites maxima des fonctions $\varphi_p(z)$. De ce calcul, nous déduirons alors aisément des séries formées avec ces fonctions et qui représenteront des fonctions holomorphes dans toute aire intérieure à toutes les précédentes.

Supposons que le module d'une fonction $\psi(z)$ ne dépasse pas M quand z est à l'intérieur d'une certaine aire $\mathcal{A}$ ou sur son contour, que nous prenons comme contour C d'intégration. Si z reste à l'intérieur

de $\mathcal{B}$ ou sur son contour, $\frac{z}{x}$ est à distance finie, et ne passe pas par les points singuliers de φ; mais il pourra en être voisin, et par suite φ pourra devenir très grand. En posant $\frac{z}{\alpha} = z'$, on a

$$\frac{z}{x} - \alpha = (z' - x)\frac{\alpha}{x}.$$

Si le contour de $\mathcal{B}$ est rapproché de celui de $\mathcal{A}$, certaines valeurs α pourront être telles que $|z' - x|$ soit petit.

Supposons que les points α soient isolés et qu'il existe un nombre m tel que, pour chacun d'eux, $(z - \alpha)^m \varphi(z)$ ait une limite supérieure quand z tend vers α.

27. Si m était négatif ou nul, il est clair que dans une région finie $|\varphi(z)|$ serait limité supérieurement. Sinon, que l'on trace autour de chaque point α un cercle de rayon assez petit r_1, on aura pour tous les points de ce cercle $|\varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{|z-\alpha|^m}$, ε étant un certain nombre positif; et, en dehors de ces cercles, $|\varphi(z)|$ aurait un maximum. Or, lorsque z est sur l'aire $\mathcal{B}$ et que x décrit C, $\frac{z}{x}$ reste fini; cette remarque subsisterait si l'on déformait un peu les aires $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$, sans changer leur signification. Donc, toutes les fois que les expressions $\left|\frac{z}{x} - \alpha\right|$ seront supérieures à r_1, $\left|\varphi\left(\frac{z}{x}\right)\right|$ aura un maximum $\mathfrak{M}$; il suffit pour cela que $|z' - x|$ reste supérieur au produit, r, de r_1 par le maximum de $\left|\frac{x}{\alpha}\right|$ qui a, lui aussi (du moins pour les points x qu'il y a lieu de considérer), une limite supérieure. Ceci posé, et z étant choisi, figurons les cercles de rayon r qui ont pour centres les différents points z' déduits de z. Ces cercles pourront détacher des arcs sur le contour d'intégration. Lorsque x sera sur un pareil arc λ, $|z' - x|$ sera supérieur à la plus courte distance δ des contours de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$, et comme $\left|\frac{\alpha}{x}\right|$ a un minimum c pour les contours d'intégration que nous avons à considérer, on aura $\left|\frac{z}{x} - \alpha\right| > \delta c$ et aussi $\left|\frac{z}{x} - \alpha\right| > |z' - x| c$. Par suite,

x décrivant λ, $\left|\varphi\left(\frac{z}{x}\right)\right|$ est plus petit que la plus grande des deux quantités $\mathfrak{M}$, $\frac{\varepsilon}{c^m|z'-x|^m}$. Donc la portion correspondante d'intégrale est à coup sûr inférieure à la somme des deux suivantes : l'une s'obtient en remplaçant $\psi(x)\varphi\left(\frac{z}{x}\right)\frac{1}{x}$ par $M\mathfrak{M}\frac{1}{\xi}$, si ξ désigne une limite inférieure de $|x|$; l'autre est $\frac{M\varepsilon}{2\pi\xi c^m}\int_\lambda \frac{|dx|}{|z'-x|^m}$, soit $\frac{M\varepsilon}{2\pi\xi c^m}\mathrm{I}$. Posons $|z'-x|=y$, la portion du contour d'intégration située à l'intérieur du cercle de centre z' et de rayon y a une longueur qui est fonction de y, $\sigma(y)$. Or *on peut supposer que, pour tous les contours que nous aurons à utiliser, le rapport de la longueur du contour située à l'intérieur d'un cercle arbitraire au rayon de ce cercle, a une limite supérieure finie*. Dès lors, soit k cette limite. On a

$$\mathrm{I}=\int_\lambda \frac{d\sigma(y)}{y^m}.$$

Une intégration par parties montre que l'on a

$$\mathrm{I}<k\frac{2m-1}{(m-1)\delta^{m-1}} \qquad \text{si} \qquad m>1$$

et

$$\mathrm{I}<k(1-\mathrm{L}\delta) \qquad \text{si} \qquad m=1 \text{ (δ est supposé inférieur à 1)},$$

$$\mathrm{I} \text{ fini} \qquad \text{si} \qquad m<1.$$

28. Bref, il résulte de la considération de l'intégrale de la formule (22), que si l'on désigne par M_1 une limite supérieure de $|f(z)|$ quand z est sur $\mathfrak{B}$ ou à son intérieur, on peut trouver une constante P, *valable aussi pour les aires voisines de* $\mathfrak{A}$, et telle que l'on ait

$$M_1<\frac{PM}{\delta^{m-1}} \qquad \text{si} \qquad m>1$$

et

$$M_1<PM|\mathrm{L}\delta| \qquad \text{si} \qquad m=1.$$

29. Partant d'une aire telle que $\mathfrak{A}$, nous pouvons en construire successivement d'autres intérieures aux précédentes $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, ...,

$\mathcal{A}_n, \ldots$ de manière que la plus courte distance de deux contours voisins soit donnée, *par exemple*, par les termes de la série

$$\frac{h}{2(\text{L}2)^\mu}, \quad \frac{h}{3(\text{L}3)^\mu}, \quad \ldots, \quad \frac{h}{n(\text{L}n)^\mu}, \quad \ldots \quad (\mu > 1).$$

Elles pourront ainsi contenir toutes une aire $\mathcal{A}'$ différant de $\mathcal{A}$ d'aussi peu que l'on veut, si h est choisi assez petit. On définira par la relation (22) les fonctions $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, ..., $\varphi_n(z)$, ... dans les aires $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots$ et, par conséquent, dans $\mathcal{A}'$. Les raisonnements qui ont été faits donnent des limites maxima des modules de ces fonctions.

Si $m > 1$, on a

$$|\varphi_n(z)| < \text{M}\left(\frac{\text{P}}{h}\right)^{n-1}(n!)^{m-1}(\text{L}2.\text{L}3\ldots\text{L}n)^{\mu(m-1)}.$$

Nous allons choisir une série $g(t) = \Sigma d_p t^p$, telle que la série $\Sigma d_n \varphi_n(z)$ soit absolument convergente dans $\mathcal{A}'$, quel que puisse être $\frac{\text{P}}{h}$. Posons $d_n = \frac{d'_n}{n^{n(m-1)}}$, on a

$$|d_n \varphi_n(z)| < |d'_n| \text{Q}^n(\text{L}2.\text{L}3\ldots\text{L}n)^{\mu(m-1)},$$

Q étant une constante. La condition posée sera donc réalisée certainement pour $|d_n| \leq \frac{d'^n_n}{n^{n(m-1)}(\text{L}n)^{\mu(m-1)n}}$, si d'_n est une variable infiniment petite. Or *il suffira* pour cela *que la fonction* $\Sigma d_p t^p$ *soit entière d'ordre inférieur à* $\frac{1}{m-1}$.

30. Si $m = 1$, on a

$$|\varphi_n(z)| < \text{MP}^{n-1}\prod_2^n(\text{L}n + \mu\text{LL}n - \text{L}h)$$

et, en désignant par Q une nouvelle constante,

$$|\varphi_n(z)| < \text{MQ}^n\text{L}2.\text{L}3\ldots\text{L}n.$$

Il suffit ici que $|d_n|^{\frac{1}{n}}|\text{L}2\ldots\text{L}n|^{\frac{1}{n}}$ tende vers o. *Cette condition sera certainement réalisée si l'on prend*

$$d_p = \left(\frac{d'_p}{\text{L}p}\right)^p$$

et que d'_p tende vers o.

31. Enfin, nous avons négligé le cas où m serait inférieur à 1. Alors, on aurait évidemment

$$|\varphi_n(z)| < \text{MP}^n,$$

P étant une constante relative à l'aire $\mathcal{A}$. *Il suffit alors de prendre pour $g(t)$ une fonction entière quelconque.*

32. Ainsi, avec les conditions que nous avons posées et les notations choisies, la fonction $\sum_n g(a_n)z^n = \Phi(z)$ est holomorphe dans toute aire $\mathcal{A}'$:

1° *Si $g(t)$ est une fonction entière d'ordre inférieur à $\frac{1}{m-1}$, quand m est plus grand que* 1 ;

2° *Si* $\text{L}n|d_n|^{\frac{1}{n}}$ *est infiniment petit, quand* $m = 1$;

3° *Si $g(t)$ est une fonction entière quelconque, quand* $m < 1$.

33. En général, nous pourrons déformer l'aire $\mathcal{A}$ de manière à amener z en tout point n'appartenant pas à $\mathcal{C}$. Si $\varphi(z)$ est uniforme autour de certains points singuliers, il en sera de même des fonctions $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, pour les points qu'on en déduit 2 à 2, 3 à 3, ... Alors, toutes les fonctions φ sont uniformes autour d'un même point α singulier pour elles toutes ou pour un certain nombre d'entre elles; $\Phi(z)$ est uniforme autour du même point. En particulier, si $\varphi(z)$ est uniforme dans tout le plan, il en est de même de $\Phi(z)$. Dans le cas où il n'en serait pas ainsi, on sait [1] que l'origine peut être un point singulier pour le prolongement de $\Phi(z)$.

---

[1] *Voir* la Communication déjà citée de M. Borel.

34. J'ai indiqué [1] cette extension du théorème de M. Hadamard avec des généralisations possibles plus complètes; plutôt que de les développer, je préfère donner quelques applications.

35. *Applications.* — Nous retrouvons par la méthode précédente des résultats déjà obtenus directement.

Soit $\varphi(z) = -\mathrm{L}(1-z)$. On peut prendre pour m un nombre positif quelconque. Donc, si $g(t)$ est une fonction entière, $\sum g\left(\frac{1}{n}\right) z^n$ n'a à distance finie que le point singulier $+1$.

Soit $\varphi(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$. m sera un nombre arbitraire supérieur à 2. En supposant $g(t)$ fonction entière d'ordre plus petit que 1, $\Sigma g(n) z^n$ a la seule singularité $+1$ à distance finie et elle est uniforme dans tout le plan.

Les propositions auxquelles nous parvenons sont moins complètes, la première surtout, que celles que nous avons eues précédemment. Ce fait n'est pas surprenant, puisque nous ne faisons qu'utiliser des propriétés s'appliquant à des types de fonctions très généraux.

36. Nous avons vu (n° **22**) que la fonction $\sum \mathrm{L}n\, z^n$ n'a, à distance finie, que la singularité $+1$. Je dis que si m est un nombre quelconque supérieur à 1 *le produit* $(z-1)^m \sum \mathrm{L}n\, z^n$ *tend vers* 0 *quand* z *tend vers* 1. Comme $\sum \mathrm{L}n\, z^n$ est égal à un quotient de la forme $\dfrac{\sum g\left(\frac{1}{n}\right) z^n}{1-z}$ où $g(t)$ désigne une fonction holomorphe à l'origine où elle devient nulle, il nous suffit de prouver que, quel que soit le nombre positif k, $(1-z)^k \sum g\left(\frac{1}{n}\right) z^n$ a pour limite 0. Or (n° **12**), le long d'une ligne ne passant pas par le point $+1$, on a une limite maximum du module $\sum g\left(\frac{1}{n}\right)$ (en ne faisant au besoin commencer le développement qu'à une certaine puissance z^p) en multipliant par une quantité fixe le

[1] *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVI, n° 10.

module maximum de $\sum \frac{1}{n} z^n$ (abstraction faite des mêmes termes). La proposition est donc vraie pour la fonction proposée, puisqu'elle est exacte pour $-\mathrm{L}(1-z)$.

Cela posé, si $g(t)$ désigne maintenant une fonction entière quelconque d'ordre fini, la série $\sum g(\mathrm{L}n) z^n$ définit une fonction qui n'a, à distance finie, que l'unité comme valeur singulière.

Par exemple, soit h un nombre positif ou négatif quelconque, si l'on prend $g(t) = e^{ht}$, $g(\mathrm{L}n) = n^h$, la fonction $\sum n^h z^n$ rentre dans l'exemple précédent.

57. *Examen d'autres hypothèses.* — L'hypothèse du n° **26** a trait à un premier mode de comparaison, celui de $\varphi(z)$ à une expression de la forme $\frac{1}{(z-\alpha)^m}$, dans le voisinage de α. On peut évidemment choisir des types de fonctions susceptibles de se rapprocher davantage des fonctions φ que l'on peut avoir à considérer, de manière à trouver des caractères plus avantageux que ceux auxquels on a d'abord été conduit.

Prenons le quotient $\frac{\left[\mathrm{L}\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)\right]^p}{(z-\alpha)^m}$, où m désigne un nombre au moins égal à 1 et p un nombre réel quelconque, et supposons que pour chaque point α le produit

$$\frac{\varphi(z)(z-\alpha)^m}{\left[\mathrm{L}\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)\right]^p}$$

ait une limite supérieure quand z tend vers α. Il n'y a pas de difficulté (pas plus d'ailleurs que précédemment) provenant de ce que la fonction à étudier peut n'être pas uniforme. En effet, lorsqu'il y a lieu d'utiliser l'hypothèse sur sa limite supérieure, dans l'évaluation de l'intégrale, le chemin décrit par la variable $\left(\frac{z}{x}\right)$ ne tourne pas une infinité de fois autour du point singulier.

Cette remarque faite et les notations conservées, nous avons à

prendre l'intégrale

$$I = \int_\lambda \frac{\left[L\left(\frac{1}{cy}\right)\right]^p}{y^m} d\sigma(y).$$

Or on a

$$I = \left\{\frac{\left[L\left(\frac{1}{cy}\right)\right]^p}{y^m}\sigma(y)\right\}_{(y_0)}^{(y_1)} - \int_\lambda \sigma(y)\, d\frac{\left[L\left(\frac{1}{cy}\right)\right]^p}{y^m},$$

y_0 et y_1 étant les limites entre lesquelles y varie. On sait que

$$\delta < y_0 < y_1 \leqq r.$$

Comme $\sigma(y) < ky$, la partie calculée est infiniment grande, au plus de l'ordre de $\frac{\left[L\left(\frac{1}{\delta}\right)\right]^p}{\delta^{m-1}}$ pour δ infiniment petit (sauf pour $m = 1$ et $p < 0$). L'intégrale qui reste a un module inférieur à $k \int_\lambda y\, d\frac{\left[L\frac{1}{cy}\right]^p}{y^m}$. Soit kJ cette dernière expression. Elle s'écrit

$$\left(\frac{\left[L\frac{1}{cy}\right]^p}{y^{m-1}}\right)_{y_0}^{y_1} - \int_\lambda \frac{\left[L\frac{1}{cy}\right]^p}{y^m} dy.$$

Le premier terme est encore au plus de l'ordre de $\frac{\left(L\frac{1}{\delta}\right)^p}{\delta^{m-1}}$. Quant à l'intégrale $\int_\lambda \frac{\left(L\frac{1}{cy}\right)^p}{y^m} dy$ que nous désignerons par J', nous distinguerons deux cas :

Premier cas : $m = 1$. — On a de suite

$$J' = \frac{1}{p+1}\left\{\left(L\frac{1}{cy_0}\right)^{p+1} - \left(L\frac{1}{cy_1}\right)^{p+1}\right\}$$

si $p \neq -1$, et si $p = -1$

$$J' = LL\frac{1}{cy_0} - LL\frac{1}{cy_1}.$$

Ces quantités sont respectivement de l'ordre $\left(L\frac{1}{\delta}\right)^{p+1}$ et $LL\frac{1}{\delta}$.

Deuxième cas : $m > 1$ et $p \neq 0$ ($m > 1$ et $p = 0$ est une hypothèse examinée plus haut).

On a

$$\frac{m-1}{p} J' + \int_\lambda \frac{\left(L\frac{1}{cy}\right)^{p-1}}{y^m} dy = \left[\frac{\left(L\frac{1}{cy}\right)^p}{p y^{m-1}}\right]_{(y_1)}^{(y_0)}.$$

Or, $L\frac{1}{cy}$ a un minimum, quand y va de y_0 à y_1, et si $r(\geqq y_0)$ est petit, ce minimum est grand; désignons-le par l. On en conclut

$$J' > l \int_\lambda \frac{\left(L\frac{1}{cy}\right)^{p-1}}{y^m} dy,$$

et, par suite, le premier membre est compris entre

$$\frac{m-1}{p} J' \quad \text{et} \quad \left(\frac{m-1}{p} + \frac{1}{l}\right) J'.$$

Donc, enfin, J' est de l'ordre du second membre, c'est-à-dire de

$$\frac{\left(L\frac{1}{\delta}\right)^p}{\delta^{m-1}}.$$

Les résultats de cette discussion sont les suivants :

L'ordre de grandeur de I est celui de

$$\frac{\left(L\frac{1}{\delta}\right)^p}{\delta^{m-1}}$$

si $m > 1$ (p peut être nul, puisqu'on retrouve alors la formule déjà établie dans ce cas),

$$\left[L\left(\frac{1}{\delta}\right)\right]^{p+1}$$

si $m = 1$ et $p > -1$,

$$LL\frac{1}{\delta},$$

si $m = 1$ et $p = -1$,
si $m = 1$ et $p < -1$, une quantité finie.

38. En raisonnant comme aux nos **28** et suivants on parvient aux propriétés que voici :

1° *m est supérieur à* 1. — Soit ϖ un nombre choisi supérieur à $p + m - 1$. Si $p + m - 1 \geqq 0$, il suffit que

$$|d_n| \leqq \frac{d_n'^n}{n^{n(m-1)}(\mathrm{L}n)^{\varpi n}};$$

si $p + m - 1 < 0$, il suffit que

$$|d_n| \leqq \frac{d_n'^n \left(\mathrm{L}\frac{n}{2}\right)^{-\frac{\varpi n}{2}}}{n^{n(m-1)}} \qquad (\text{on a pris } \varpi < 0).$$

d'_n désigne une quantité infiniment petite. Dans les deux cas, une fonction entière d'ordre inférieur à $\frac{1}{m-1}$ répond à la condition correspondante.

2° *m est égal à* 1 *et p supérieur à* -1. On pourra prendre

$$(\mathrm{L}n)^{p+1}|d_n|^{\frac{1}{n}}$$

infiniment petit.

3° *m est égal à* 1 *et p à* -1. — Il suffira que

$$\mathrm{L}.\mathrm{L}n.|d_n|^{\frac{1}{n}}$$

tende vers 0.

39. On remarquera l'analogie des caractères que nous appliquons aux points singuliers de φ (et que l'on pourrait évidemment compliquer de plus en plus) avec ceux de M. Bertrand relatifs à la convergence des séries. Quant aux caractères que nous en déduisons pour les fonctions Φ, elles-mêmes, ils montrent l'utilité qu'il y aurait à poursuivre la classification des fonctions entières en distinguant entre elles les fonctions d'un même ordre.

40. *Applications.* — Voici plusieurs exemples où la fonction $\Phi(z)$ formée n'a que l'unité comme valeur singulière finie.

1° Soit $F(z)$ une fonction entière quelconque, $\sum A_n z^n$; et posons $\varphi(z) = \sum a_n z^n$, avec $a_n = A_0 + A_1 + \ldots + A_n$. Nous aurons

$$\varphi(z) = \frac{F(z)}{1-z},$$

et, par suite, si $|d_n|^{\frac{1}{n}} Ln$ tend vers o pour n infini, nous pourrons choisir $\Phi(z) = \sum g(a_n) z^n$.

2° Soit $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$; il suffit de prendre la fonction $g(t)$ de manière que $|d_n|^{\frac{1}{n}}(Ln)^2$ soit infiniment petit.

3° Supposons que la série $c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots$ ait un rayon de convergence différent de zéro. La fonction

$$\varphi(z) = \sum \left(c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots + \frac{c_n}{n^n}\right) z^n,$$

n'a, comme on sait, que l'unité pour valeur singulière à distance finie. Il résulte d'ailleurs du calcul effectué au Chap. II, n° **12**, que, dans une aire limitée, $\frac{\varphi(z)}{1-z}$ reste fini. Nous ferons donc tendre vers o l'expression $|d_n|^{\frac{1}{n}} Ln$, et en posant

$$a_n = c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots + \frac{c_n}{n^n}$$

la fonction $\Phi(z)$ répondra à la question.

41. *Remarque finale.* — Les extensions que nous avons données du théorème de M. Hadamard consistent en définitive dans des relations d'inégalité entre des limites supérieures d'une certaine fonction $\varphi(z) = \sum a_n z^n$ et des différentes fonctions $\sum a_n^p z^n$ que l'on peut en déduire. Ce sont des relations de ce genre que nous avions établies directement pour les fonctions particulièrement simples et intéres-

santes $\varphi(z) = \sum \frac{1}{n} z^n$ et $\varphi(z) = \sum n z^n$. Lorsqu'on se borne à conclure de là un caractère relatif à des domaines réguliers pour des fonctions $\Phi(z) = \sum g(a_n) z^n$ où g désigne une fonction convenablement choisie, il est à coup sûr inutile de faire intervenir les enveloppes de séries. Mais cette théorie, dont nous nous sommes servi pour construire à partir des fonctions $\sum \frac{1}{n} z^n$ et $\sum n z^n$ des séries d'une nature plus complexe, nous pouvons l'appliquer à présent en prenant pour point de départ d'autres fonctions φ pour lesquelles nous saurons utiliser le théorème étendu de M. Hadamard. Je me borne à cette indication et à l'exemple suivant : Si la série $\sum c_p t^p$ représente une fonction entière d'ordre fini et si l'on pose

$$g_n(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n,$$

la fonction $\Phi(z) = \sum g_n(\mathrm{L}n) z^n$ n'a pas d'autre singularité que l'unité à distance finie.

Ce résultat devient évident : 1° si l'on utilise la remarque du n° **35** sur la fonction $\varphi(z) = \sum \mathrm{L}n\, z^n$; 2° si l'on observe que dans la série

$$c_p[(\mathrm{L}2)^p z^2 + (\mathrm{L}3)^p z^3 + \ldots + (\mathrm{L}n)^p z^n + \ldots + \ldots]$$

les termes $c_p(\mathrm{L}n)^p z^n$ sont comparables à ceux de la série $\sum \frac{1}{\mathrm{R}^n} z^n$, quel que soit R, pourvu que l'on choisisse p assez grand et que l'on fasse varier n de p à une certaine valeur p' qui rend $\frac{p'}{p}$ infiniment grand avec p, conformément à la troisième condition fondamentale (Chap. II, n° **12**).

42. *Conclusion.* — Il ressort du présent Travail que la comparaison d'une série donnée avec des séries connues, comparaison qui constitue vraiment le principe fondamental dans l'étude de la convergence, peut être utilisée pour la recherche des singularités sur le cercle ou dans le

plan. Déjà, on peut construire par ce procédé des séries variées sur lesquelles on obtient des renseignements précis. Mais il reste à savoir s'il serait possible de trouver des caractères simples s'appliquant (sauf des cas exceptionnels) *à des séries arbitrairement données*. La variété de la nature et de la distribution possibles des singularités rend au moins improbable une solution satisfaisante de ce problème.

Formule pour le calcul rapide d'un certain potentiel;

PAR M. LERCH.

Dans son excellent Mémoire : *Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation* $\Delta F = 0$ (*Journal de Mathématiques*, 1886), M. Appell a obtenu quelques formules très élégantes permettant d'évaluer assez rapidement certains potentiels. L'une d'elles, qui correspond au cas le plus simple,

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + u}} + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{\sqrt{(x - ma)^2 + u}} - \frac{1}{\sqrt{m^2 a^2}} \right],$$

présente cette circonstance que les coefficients de son développement ne sont pas exprimés sous forme finie. Il m'a semblé utile de chercher un développement à convergence rapide, différent de celui de l'illustre géomètre, et dont les termes seraient des fonctions élémentaires et simples.

J'y suis parvenu à l'aide de quelques invariants analytiques de formes quadratiques, lesquels j'avais considérés à maintes reprises. Mais les recherches correspondantes étant rédigées en tchèque, il me semble indispensable de présenter tous les développements sous la forme aussi élémentaire que possible.

Je prends pour point de départ une formule que j'avais obtenue autrefois (¹) et qui se vérifie tout de suite :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[u+(w+m)^2]^s} \\ &\quad = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)\,u^{s-\frac{1}{2}}} + \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{m=1}^{\infty} \cos 2mw\pi \int_0^{\infty} e^{-uz-\frac{m^2\pi^2}{z}} z^{s-\frac{3}{2}}\,dz. \end{aligned} \right.$$

En supposant $s > 1$, j'y pose $w = v$, puis je change u en $\dfrac{u+b(w+n)^2}{a}$, et j'ajoute les résultats pour $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Il vient

$$\begin{aligned} &\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[u+a(v+m)^2+b(w+n)^2]^s} \\ &\quad = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\sqrt{a}\,\Gamma(s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[u+b(w+n)^2]^{s-\frac{1}{2}}} \\ &\qquad + \frac{2\sqrt{\pi}}{a^s\Gamma(s)} \sum_{m=1}^{\infty} \cos 2mv\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u+b(w+n)^2}{a}z-\frac{m^2\pi^2}{z}} z^{s-\frac{3}{2}}\,dz; \end{aligned}$$

cela étant, échangeons les lettres a et b, puis v et w; le premier membre reste inaltéré par cette opération et disparaîtra en retranchant les expressions obtenues de cette manière. Il s'ensuit

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\sqrt{ab}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{a}}{[u+a(v+n)^2]^{s-\frac{1}{2}}} - \frac{\sqrt{b}}{[u+b(w+n)^2]^{s-\frac{1}{2}}} \right\} \\ &\quad = \frac{3}{a^s} \sum_{m=1}^{\infty} \cos 2mv\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u+b(w+n)^2}{a}z-\frac{m^2\pi^2}{z}} z^{s-\frac{3}{2}}\,dz \\ &\qquad - \frac{2}{b^s} \sum_{m=1}^{\infty} \cos 2mw\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u+a(v+n)^2}{b}z-\frac{m^2\pi^2}{z}} z^{s-\frac{3}{2}}\,dz. \end{aligned}$$

(¹) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. III.

Dans cette équation posons $s = 1 + \rho$, ρ étant infiniment petit et positif; il vient

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\rho)}{\sqrt{ab}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{a^{-\rho}}{\left[\frac{u}{a} + (v+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}} - \frac{b^{-\rho}}{\left[\frac{u}{b} + (w-n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}} \right\}$$

$$= \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos 2mv\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{u+b(w+n)^2}{a}z - \frac{m^2\pi^2}{z}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$- \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos 2mw\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{u+a(v+n)^2}{b}z - \frac{m^2\pi^2}{z}} \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Les intégrales dans le second membre s'obtiennent à l'aide de la formule élémentaire

$$\int_0^{\infty} e^{-pz - \frac{q}{z}} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-2\sqrt{pq}},$$

de sorte que le second membre devient

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{ab}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2mv\pi}{\sqrt{\frac{u}{b} + (w+n)^2}}\, e^{-2m\pi\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{u}{b}+(w+n)^2}}$$

$$- \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{ab}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2mw\pi}{\sqrt{\frac{u}{a} + (v+n)^2}}\, e^{2m\pi\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{u}{a}+(v+n)^2}};$$

il se simplifie en effectuant la sommation par rapport à m qui se fait à l'aide de la formule

$$\sum_{1}^{\infty} 2r^m \cos 2mw\pi = \frac{\cos 2w\pi - r}{\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) - \cos 2w\pi},$$

et l'on aura

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+\rho)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{a^{-\rho}}{\left[\frac{u}{a}+(v+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}}-\frac{b^{-\rho}}{\left[\frac{u}{b}+(w+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}}\right\}$$

$$=\sqrt{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{u}{b}+(w+n)^2}}\,\frac{\cos 2v\pi-e^{-2\pi\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{u}{b}+(w+n)^2}}}{\cos\text{hyp}\left[2\pi\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{u}{b}+(w+n)^2}\right]-\cos 2v\pi}$$

$$-\sqrt{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{u}{a}+(v+n)^2}}\,\frac{\cos 2w\pi-e^{-2\pi\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{u}{a}+(v+n)^2}}}{\cos\text{hyp}\left[2\pi\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{u}{a}+(v+n)^2}\right]-\cos 2w\pi}.$$

Il s'agit maintenant de la limite de l'expression

$$U_\rho=\sum_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{a^{-\rho}}{\left[\frac{u}{a}+(v+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}}-\frac{b^{-\rho}}{\left[\frac{u}{b}+(w+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}}\right\}$$

pour $\rho=0$. En employant le développement $\left(\frac{b}{a}\right)^\rho=1+\rho\log\frac{b}{a}+(\rho^2)$, on aura

$$U_\rho=b^{-\rho}\sum_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\left[\frac{u}{a}+(v+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}}-\frac{1}{\left[\frac{u}{b}+(w+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}}\right\}$$

$$+b^{-\rho}\sum\frac{\rho\log\frac{b}{a}+(\rho^2)}{\left[\frac{u}{a}+(v+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}}.$$

Cela étant, la formule (1) fait voir que la quantité

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left[\frac{u}{a}+(v+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\rho}}$$

se réduit, pour ρ infiniment petit, à la quantité

$$\frac{\Gamma(\rho)}{\left(\frac{u}{a}\right)^{\rho}},$$

le reste étant fini. Il s'ensuit que l'on aura

$$\lim_{\rho=0} \mathrm{U}_\rho = \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{a}+(v+n)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{b}+(w+n)^2}} \right\} + \log\frac{b}{a},$$

d'où, par conséquent,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{a}+(v+n)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{b}+(w+n)^2}} \right\}$$

$$= \log\frac{a}{b} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{b}+(w+n)^2}} \, \frac{\cos 2v\pi - e^{-2\pi\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{u}{b}+(w+n)^2}}}{\cos\operatorname{hyp}\left[2\pi\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{u}{b}+(w+n)^2}\right] - \cos 2v\pi}$$

$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{a}+(v+n)^2}} \, \frac{\cos 2w\pi - e^{-2\pi\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{u}{a}+(v+n)^2}}}{\cos\operatorname{hyp}\left[2\pi\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{u}{a}+(v+n)^2}\right] - \cos 2w\pi}.$$

Pour simplifier, changeons u en au, et posons $\frac{a}{b} = t^2$; si l'on écrit ensuite

$$(2) \qquad \psi(w, u) = \lim_{n=\infty}\left(\sum_{\nu=-n}^{n} \frac{1}{\sqrt{(w+\nu)^2+u}} - 2\log n \right),$$

notre résultat prend la forme

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \psi(v, u) - \psi(w, t^2 u) \\ & \quad = \log t^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(w+n)^2+t^2u}} \, \frac{\cos 2v\pi - e^{-\frac{2\pi}{t}\sqrt{(w+n)^2+t^2u}}}{\cos\operatorname{hyp}\left[\frac{2\pi}{t}\sqrt{(w+n)^2+t^2u}\right] - \cos 2v\pi} \\ & \qquad - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(v+n)^2+u}} \, \frac{\cos 2w\pi - e^{-2\pi t\sqrt{(v+n)^2+u}}}{\cos\operatorname{hyp}\left[2\pi t\sqrt{(v+n)^2+u}\right] - \cos 2w\pi}. \end{aligned} \right.$$

Cette formule qui résout le problème énoncé se simplifie en prenant $t = 1$, ce qui suffit, par exemple, pour évaluer le potentiel étudié par Riemann dans son Mémoire *Zur Theorie der Nobilischen Farbenringe;* on a

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi(v, u) - \psi(w, u) \\ &\quad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(w+n)^2+u}}\, \frac{\cos 2v\pi - e^{-2\pi\sqrt{(w+n)^2+u}}}{\cos\text{hyp}\left[2\pi\sqrt{(w+n)^2+u}\right] - \cos 2v\pi} \\ &\qquad - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(v+n)^2+u}}\, \frac{\cos 2w\pi - e^{-2\pi\sqrt{(v+n)^2+u}}}{\cos\text{hyp}\left[2\pi\sqrt{(v+n)^2+u}\right] - \cos 2w\pi}. \end{aligned}\right.$$

On peut obtenir une évaluation par l'intégrale définie, si l'on multiplie par dw et si l'on intègre de zéro à 1; on a pour ce but la formule qui s'obtient tout de suite au moyen de la définition (2)

$$\int_0^1 \psi(w, u)\, dw = \log\frac{4}{u},$$

et il s'ensuit

$$\psi(v, u) = \log\frac{4}{u} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+u}}\, \frac{\cos 2v\pi - e^{-2\pi\sqrt{x^2+u}}}{\cos\text{hyp}\left[2\pi\sqrt{x^2+u}\right] - \cos 2v\pi},$$

ou bien

$$(5)\qquad \psi(v, u) = \log\frac{4}{a} + 2\int_0^{\infty} \frac{\cos 2v\pi - e^{-2\pi\sqrt{x^2+u}}}{\cos\text{hyp}\left(2\pi\sqrt{x^2+u}\right) - \cos 2v\pi}\, \frac{dx}{\sqrt{x^2+u}},$$

formule qui peut s'écrire d'une manière encore plus simple, si l'on fait $\sqrt{x^2+u} = x'$,

$$(5^a)\qquad \psi(v, u) = \log\frac{4}{u} + 2\int_{\sqrt{u}}^{\infty} \frac{\cos 2w\pi - e^{-2\pi x}}{\cos\text{hyp}\, 2\pi x - \cos 2w\pi}\, \frac{dx}{\sqrt{x^2-u}}.$$

La formule (4) est d'une classe de relations qui sont assez nombreuses, et de laquelle je veux mentionner encore deux exemples, à

savoir

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \left[\sqrt{(w_1+\nu)^2+u} - \sqrt{(w_2+\nu)^2+u} \right]$$

$$= w_1^2 - w_2^2 - \frac{1}{2\pi} \log \prod_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1 - 2e^{-2\pi\sqrt{(w_1+m)^2+u}} \cos 2w_2\pi + e^{-4\pi\sqrt{(w_1+m)^2+u}}}{1 - 2e^{-2\pi\sqrt{(w_2+m)^2+u}} \cos 2w_1\pi + e^{-4\pi\sqrt{(w_2+m)^2+u}}},$$

et puis

$$4\int_t^{\infty} \frac{\sqrt{x^2-t^2}\,dx}{e^{2x\pi}-1} = At^2 - \frac{t}{\pi}\log P(t),$$

où l'on a posé

$$P(t) = \frac{1-e^{-2\pi t}}{1-e^{-2\pi}} \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1-e^{-2\pi t\sqrt{m^2+1}}}{1-e^{-2\pi\sqrt{1+\frac{m^2}{t^2}}}} \right)^2,$$

et A représente une constante qui peut être définie par la limite

$$A = \frac{2}{3} + \log 2 + \lim_{n=\infty}\left(n^2 + n + \log n - \sum_{\nu=-n}^{n} \sqrt{\nu^2+1} \right).$$

On trouvera des démonstrations, avec d'autres développements, dans un Mémoire sur des développements à convergence rapide de certaines limites, qui va être présenté à l'Académie de Prague.

Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre;

PAR M. N. SALTYKOW.

Le Travail qui va suivre a pour objet l'étude d'un lien intime entre les problèmes d'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles et de celles aux différentielles totales, présentant une généralisation des recherches de Cauchy et Jacobi sur une seule équation. On établit de la sorte parmi les manières de traiter les problèmes d'intégration des équations simultanées et d'une seule équation une analogie complète, dont la Science semblait être privée jusqu'à présent. De plus, la théorie développée offre un intérêt particulier, les théorèmes, dont S. Lie a enrichi la théorie des équations en question, s'en présentant comme conséquences immédiates. J'ai eu l'honneur de publier dans courante les résultats de mes recherches dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* mais je veux en donner dans les pages suivantes une démonstration détaillée.

CHAPITRE I.

DES INTÉGRALES COMPLÈTES.

1. Le but de ce Chapitre est d'introduire plusieurs modifications dans la méthode des caractéristiques de Cauchy pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue et dont M. S. Lie a donné une généralisation sur les systèmes des équations simultanées. Je veux précisément étudier le point important de cette théorie, concernant le calcul des intégrales complètes au sens de Lagrange. Cette question me semble avoir un certain intérêt, car la méthode de Cauchy devient quelquefois illusoire. C'est à cause de cette circonstance que plusieurs auteurs éminents introduisent dans ladite théorie une nouvelle notion de M. S. Lie sur les intégrales des équations en question. Mais, c'est en conservant la première notion de Lagrange, que je me propose de combler ici cette lacune. D'ailleurs, la question posée étant résolue complètement pour une seule équation par MM. Mayer et Lemonnier [1], il ne nous reste qu'à étendre leurs résultats aux systèmes d'équations simultanées.

2. Considérons le système d'équations différentielles

$$
(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} p_k + \mathrm{H}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = 0, \\ \qquad k = 1, 2, \ldots, m \qquad m < n, \end{array}\right.
$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des variables indépendantes et z la fonction inconnue; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ désignant les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$. Nous supposons que les équations (1) forment un système *complet* en entendant par là que les égalités

$$
(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial x_h} - \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial z}\mathrm{H}_h - \frac{\partial \mathrm{H}_h}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathrm{H}_h}{\partial z}\mathrm{H}_k \\ \qquad + \sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial \mathrm{H}_h}{\partial p_{m+i}}\frac{d\mathrm{H}_k}{dx_{m+i}} - \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}}\frac{d\mathrm{H}_h}{dx_{m+i}}\right) = 0, \end{array}\right.
$$

(1) *Math. Ann.*, Bd. III, S. p. 445. — *Bull. de la Soc. math. de F.*, t. X, p. 223.

où l'on a posé

$$\frac{d\mathrm{H}_k}{dx_{m+i}} = \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial x_{m+i}} + \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial z} p_{m+i}, \qquad \ldots,$$

sont identiquement satisfaites pour toutes les valeurs distinctes des indices k, h de 1 à m. On les écrira plus brièvement sous la forme symbolique ([1])

$$\{\mathrm{H}_h, \mathrm{H}_k\} = 0.$$

Le problème à résoudre, c'est de *trouver les valeurs*

$$(3) \qquad z,\ p_{m+1},\ p_{m+2},\ \ldots,\ p_n$$

en fonction des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *de sorte qu'en y joignant les fonctions de mêmes variables* $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *définies par les équations* (1), *on ait des identités*

$$(4) \qquad p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}, \qquad \ldots, \qquad p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

5. En suivant Jacobi dans son Mémoire important : *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* ([2]), différentions par rapport aux $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ les identités qu'on obtient par la substitution des valeurs indiquées z, p dans les équations (1). Les identités obtenues nous montrent, en vertu des relations (4) et de celles-ci,

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_s} = \frac{\partial p_s}{\partial x_i},$$

qui en découlent pour toutes les valeurs des indices i, s de 1 à m, qu'il est nécessaire que les fonctions (3) satisfassent aux équations diffé-

---

([1]) *Cf.* DELASSUS, *Ann. de l'Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XIV, p. 126.

([2]) *Gesammelte Werke*, Bd. IV, S. 1.

rentielles

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x_k} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}} \frac{\partial z}{\partial x_{m+i}} = \mathrm{P}_k, \\ \dfrac{\partial p_\nu}{\partial x_k} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}} \frac{\partial p_\nu}{\partial x_{m+i}} = -\frac{d\mathrm{H}_k}{dx_\nu}, \\ \nu = m+1, m+2, \ldots, n; \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\mathrm{P}_k = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}} - \mathrm{H}_k.$$

Les équations (5) présentent une généralisation des systèmes étudiés par Jacobi dans son Mémoire cité plus haut et ont bien la forme de celles dont la théorie est développée dans mon Travail : *Étude sur les intégrales d'un système des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues* (¹).

Il y est démontré que la solution des équations (5) revient à intégrer le système suivant d'équations aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue f des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n$:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_k} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}} \frac{\partial f}{\partial x_{m+i}} + \mathrm{P}_k \frac{\partial f}{\partial z} - \sum_{i=1}^{n-m} \frac{d\mathrm{H}_k}{dx_{m+i}} \frac{\partial f}{\partial p_{m+i}} = 0, \\ k = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

On va voir aisément que ce dernier système est jacobien. En effet, les parenthèses de Poisson, formées pour les équations des indices h et k, deviennent

$$\sum_{\nu=1}^{n-m} \left(\mathrm{A}_\nu^{h,k} \frac{\partial f}{\partial x_{m+\nu}} + \mathrm{B}_\nu^{h,k} \frac{\partial f}{\partial p_{m+\nu}} \right) + \mathrm{A}^{h,k} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

(¹) *Journal de Liouville*, p. 423; 1897.

On a d'ailleurs

$$A_\nu^{h,k} = \frac{\partial}{\partial p_{m+\nu}} \{H_h, H_k\} = 0,$$

$$B_\nu^{h,k} = \frac{d}{dx_{m+\nu}} \{H_h, H_k\} = 0,$$

$$A^{h,k} = \sum_{\nu=1}^{n-m} p_{m+\nu} \frac{\partial}{\partial x_{m+\nu}} \{H_h, H_k\} - \{H_h, H_k\} = 0.$$

Les intégrales du système (6) sont donc définies par les équations aux différentielles totales

$$(7) \quad \begin{cases} dz = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k \right) dx_k, \\ dx_{m+i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} dx_k, \\ dp_{m+i} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{dH_k}{dx_{m+i}} dx_k, \\ i = 1, 2, \ldots, n-m. \end{cases}$$

Il est à remarquer que l'on parvient de même à ces dernières équations (7) en poursuivant l'ordre d'idées développé par Jacobi dans son Mémoire célèbre : *Nova methodus æquationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi*. En effet, soit

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = C,$$

C étant une constante arbitraire, l'équation définissant l'une des valeurs (3). Il s'ensuit que la fonction f est l'intégrale du système linéaire

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial z} H_k + [H_k, f] = 0,$$
$$k = 1, 2, \ldots m,$$

identique au système (6), les crochets rectilignes représentant, d'après

M. Mayer, les parenthèses de Poisson, généralisées par Weiler [1], et comprenant toutes les variables x_{m+r}, z, p_{m+r}.

Soit l'intégrale générale du système (7) donnée par les équations

$$(8) \qquad z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}, b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}),$$

$$(9) \qquad p_{m+i} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}, b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}),$$

$$(10) \qquad x_{m+i} = \mathrm{F}_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}, b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-m,$$

a_i, b, b_i étant des constantes arbitraires.

S'il est possible de résoudre les équations (10) par rapport à $n-m$ constantes quelconques, on a une solution du système (5) en éliminant ces constantes des équations (8), (9). Supposons, en effet, les équations (10) résolubles par rapport à $n-m$ constantes que nous nommerons $C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}$; toutes les autres étant désignées dans ce cas par $C_{n-m+1}, C_{n-m+2}, \ldots, C_{2n-2m+1}$. En éliminant $C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}$ des équations (8), (9) nous avons $n-m+1$ équations intégrales distinctes du système aux différentielles totales (7). C'est précisément une solution du système (5) comme je l'ai démontré dans le Mémoire mentionné. Le point important de nos recherches, c'est d'examiner s'il est possible de former ces dernières équations intégrales de façon à satisfaire aux conditions requises.

4. *Il est à remarquer en premier lieu qu'il suffit d'avoir*

$$(11) \qquad p_{m+i} = \frac{\partial z}{\partial x_{m+i}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-m$$

pour vérifier toutes les relations (4).

En effet, les premières équations (5) étant identiquement satisfaites, on en conclut

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = -\mathrm{H}_k.$$

(1) Mayer, *Mathematische Annalen*, Bd. IX, S. 370.

Weiler, *Zeitschrift für Math. und Phys.*, Bd. 8, S. 264; Bd. 20, S. 271.

et, par conséquent, nous avons des identités

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = p_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Pour résoudre notre problème il est donc nécessaire d'étudier à quelles conditions les relations (11) ont lieu.

5. Les équations (10) étant résolubles par rapport aux $C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}$, le déterminant fonctionnel

$$\text{(12)} \qquad D\left(\frac{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n}{C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}}\right)$$

ne s'annule pas.

De plus, en substituant les valeurs (10) des variables x_{m+i} dans les fonctions z, p_{m+i}, obtenues plus haut, on a identiquement leurs valeurs (8), (9). Désignant par des parenthèses les résultats de cette dernière opération, on obtient des identités nouvelles en différentiant les précédentes par rapport aux constantes C

$$\text{(13)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial z}{\partial x_{m+i}}\right) \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C_\nu} = \frac{\partial z}{\partial C_\nu}, \\ \nu = 1, 2, \ldots, n-m, \end{array} \right.$$

$$\text{(14)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\left(\frac{\partial z}{\partial C_s}\right) + \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial z}{\partial x_{m+i}}\right) \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C_s} = \frac{\partial z}{\partial C_s}, \\ s = n-m+1, n-m+2, \ldots, 2n-2m+1. \end{array} \right.$$

Nous allons introduire dans notre calcul une nouvelle notion sur des fonctions [1] qui seront dans la théorie développée d'une importance extrême; posons

$$U_C = \frac{\partial z}{\partial C} - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C},$$

[1] *Voir* Poincaré, *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*, p. 23; Lemonnier, *Bull. de la Soc. math. de France*, t. X, p. 223.

z, p_{m-i}, x_{m+i} ayant les valeurs (8), (9), (10), C étant l'une des constantes y contenues.

Les identités (11) ayant lieu de même pour les valeurs (10) des variables x_{m+i}, on tire des égalités (13)

$$U_{C_\nu} = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n-m.$$

Ces dernières conditions sont nécessaires, mais en même temps elles sont suffisantes. En effet, supposons que les équations

$$\frac{\partial z}{\partial C_\nu} - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C_\nu} = 0,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n-m,$$

sont identiquement satisfaites. En les retranchant des identités (13), qui ont toujours lieu, il viendra

$$\sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C_\nu} \left[p_{m+i} - \left(\frac{\partial z}{\partial x_{m+i}} \right) \right] = 0,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n-m.$$

Le déterminant (12) ne s'annulant pas, nous parviendrons aisément aux identités (11).

Quant aux égalités (14), elles donnent des conditions

$$U_{C_s} \gtrless 0$$

pour toutes les constantes C_s, qui restent dans l'expression de la fonction mentionnée z. Ces inégalités sont de même non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes, car en posant

$$\frac{\partial z}{\partial C_s} - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial z}{\partial C_s} \gtrless 0,$$

$$s = n-m+1, n-m+2, \ldots, 2n-2m+1,$$

on a, en vertu des identités (11), (14),

$$\left(\frac{\partial z}{\partial C_s} \right) \gtrless 0.$$

Cela étant, la valeur z en fonction des $x_1, x_2, \ldots, x_n$ contient explicitement les constantes arbitraires C_s.

Encore, les équations obtenues par l'élimination des constantes C_1, $C_2, \ldots, C_{n-m}$ étant des équations intégrales distinctes du système (7), il est impossible d'en éliminer les constantes $C_{n-m+1}, C_{n-m+2}, \ldots, C_{2n-2m+1}$. Donc, il n'existe point de relations entre les variables z, p, x qui ne soient contenues parmi les équations (1).

Par conséquent, *pour satisfaire aux exigences de notre problème, il est nécessaire et suffisant que les équations* (10) *soient résolubles par rapport à $n-m$ constantes quelconques, les fonctions U_c correspondantes étant identiquement nulles. De plus, si les autres $n-m+1$ fonctions U_c ne s'annulent pas, la solution obtenue est précisément une intégrale complète.*

Nous sommes en état d'indiquer plusieurs cas où les conditions citées ont lieu. Mais pour les étudier nous nous fonderons sur les deux lemmes suivants :

6. *En vertu des équations* (8), (9), (10), *la formule*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial z}\, dx_k$$

est une différentielle exacte.

Les équations (7) étant identiquement satisfaites, nous avons des identités

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x_k} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k, \\[2ex] \dfrac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k} = \dfrac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}, \\[2ex] \dfrac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k} = -\dfrac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}}. \end{cases}$$

Cela posé, il s'ensuit

$$\frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial H_k}{\partial z} = \frac{\partial^2 H_k}{\partial z\, \partial x_h} + \frac{\partial^2 H_k}{\partial z^2} \left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - H_h \right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial^2 H_k}{\partial z\, \partial x_{m+i}} \frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - \frac{\partial^2 H_k}{\partial z\, \partial p_{m+i}} \frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}} \right).$$

Différentiant par rapport à z l'identité (2), on obtient une nouvelle égalité de même identiquement satisfaite pour les valeurs (8), (9), (10) des variables z, p_{m+i}, x_{m+i}. En vertu de cette dernière formule, il viendra

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\frac{\partial H_k}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial H_h}{\partial z},$$

notre théorème étant ainsi vérifié. Posons donc

$$dW=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial H_k}{\partial z}\,dx_k.$$

7. *La fonction* U_C *est définie par l'équation*

$$U_C=U_C^0 e^{-\int_{W_0}^{W} dW},$$

U_C^0, W_0 *désignant les valeurs des fonctions* U_C, W *correspondantes aux valeurs initiales des variables* $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

La dérivée partielle $\frac{\partial U_C}{\partial x_k}$ étant mise sous la forme suivante :

$$\frac{\partial U_C}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial C}\left(\frac{\partial z}{\partial x_k}-\sum_{i=1}^{n-m}p_{m+i}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k}\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial p_{m+i}}{\partial C}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k}-\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial C}\right),$$

elle devient, en tenant compte des identités (15),

$$\frac{\partial U_C}{\partial x_k}=-\frac{\partial H_k}{\partial C}+\sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}\frac{\partial p_{m+i}}{\partial C}+\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial C}\right)$$
$$+\frac{\partial H_k}{\partial z}\sum_{i=1}^{n-m}p_{m+i}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial C}.$$

On a donc

$$\frac{\partial U_C}{\partial x_k}=-\frac{\partial H_k}{\partial z}U_C$$

te il vient, par suite,

$$U_C = U_C^0 e^{-\int_{W_0}^{W} dW}.$$

8. *Prenons pour constantes a_i, b_i, b les valeurs initiales des*

$$x_{m+i}, \quad p_{m+i}, \quad z - \sum_{i=1}^{n-m} x_{m+i} p_{m+i}.$$

Les a_i étant éliminées des équations (8), (9) *en vertu des* (10), *on a une intégrale complète du système* (1).

Désignant par z^0 la valeur initiale de z, nous avons

$$z^0 = b + \sum_{i=1}^{n-m} a_i b_i.$$

Le déterminant fonctionnel

$$D\left(\frac{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n}{a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}}\right)$$

est $\gtrless 0$, car pour les valeurs initiales des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ il devient égal à 1. Cela posé, on a

(16) $$U_{a_i}^0 = 0, \qquad U_{b_i}^0 = a_i, \qquad U_b^0 = 1.$$

Les fonctions $\frac{\partial H_k}{\partial z}$ restent holomorphes dans le domaine où les H_k, considérées comme fonctions des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n$, sont également holomorphes. L'intégrale générale du système (7) y présentant de même des fonctions z, p_{m+i}, x_{m+i} holomorphes, c'est pour ce domaine (auquel nous bornons aussi nos recherches) que la différentielle exacte dW admet une intégrale holomorphe. Par conséquent, la fonction

$$e^{-\int_{W_0}^{W} dW}$$

dans tout le cours de nos calculs a une valeur finie et l'on obtient, en vertu des (16), les identités

$$U_{a_i} = 0, \qquad U_{b_i} \gtrless 0, \qquad U_b \gtrless 0.$$

Donc, en éliminant les a_i, en vertu des (10), l'équation (8) donne une intégrale complète du système (1).

9. Il est aisé d'indiquer encore deux autres cas où les conditions requises sont satisfaites.

Supposons les équations (10) résolubles par rapport aux constantes b_i. Il suffit de prendre pour b la valeur initiale de z pour avoir

$$U^0_{b_i} = 0, \qquad U^0_b = 1, \qquad U^0_{a_i} = -b_i, \qquad \ldots$$

Si le système (1) ne présente qu'une seule équation, ce cas est celui où la méthode des caractéristiques de Cauchy donne une intégrale complète.

Enfin, les équations (10) étant résolubles par rapport aux b_ν, a_i où tous les indices ν, i sont différents, on prend pour b la valeur initiale de

$$z - \sum x_{m-i}\, p_{m-i},$$

où la sommation s'effectue par rapport aux indices i, correspondants aux valeurs b_i, qui sont à éliminer entre les équations (10). Il viendra donc

$$U^0_{b_\nu} = 0, \qquad U^0_{a_i} = 0,$$

$$U^0_b = 1, \qquad U^0_{b_i} = a_i, \qquad U^0_{a_\nu} = -b_\nu.$$

CHAPITRE II.

ÉTUDE SUR LES ÉQUATIONS DANS LESQUELLES LA FONCTION INCONNUE NE FIGURE PAS EXPLICITEMENT.

Les deux Chapitres qui vont suivre concernent la généralisation de la première méthode de Jacobi d'intégration d'une seule équation. On y introduit la notion de *fonction principale* des équations simultanées, en généralisant celle de l'illustre Jacobi.

Considérons le système d'équations différentielles

$$(1) \qquad \begin{cases} p_k + H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = 0, \\ k = 1, 2, \ldots, m, \qquad m < n, \end{cases}$$

que nous supposerons être en involution, les conditions

$$(2) \qquad \frac{\partial H_k}{\partial x_h} - \frac{\partial H_h}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}} - \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} \frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}} \right) = 0$$

étant identiquement satisfaites pour toutes les valeurs distinctes h et k de 1 à m.

Il s'ensuit que les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} dx_{m+i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} dx_k, \\ dp_{m+i} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}} dx_k, \\ i = 1, 2, \ldots, n-m, \end{cases}$$

présentent un système aux différentielles totales.

La théorie que je me propose ici de développer consiste à éclaircir

le lien entre les problèmes d'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles (1) et de celles aux différentielles totales (3). On va voir qu'on obtient par des différentiations l'intégrale générale du système (3), une intégrale complète des équations (1) étant connue, et inversement, si l'on a l'intégrale générale des équations (3), que l'intégrale complète du système (1) s'obtient par une quadrature.

Théorème I. — *Soit*

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}) + b \tag{4}$$

une intégrale complète des équations (1), $b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}$ *étant des constantes arbitraires. Le déterminant fonctionnel*

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}}\right) \tag{5}$$

ne s'annulant pas, les équations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}, \qquad \dfrac{\partial V}{\partial b_i} = a_i, \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, n-m \end{array}\right. \tag{6}$$

donnent l'intégrale générale du système (3), *les* a_i *étant de nouvelles constantes arbitraires.*

En effet, les valeurs x_{m+i}, p_{m+i} définies par le système (6) satisfont identiquement aux équations (6). On obtient donc, en les différentiant par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, des identités nouvelles

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\,\partial x_k} + \sum_{v=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\,\partial x_{m+v}} \frac{\partial x_{m+v}}{\partial x_k} = \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\,\partial x_k} + \sum_{v=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_i\,\partial x_{m+v}} \frac{\partial x_{m+v}}{\partial x_k} = 0.$$

Mais, d'autre part, en substituant dans les équations (1) leur intégrale (4), elles deviennent identiques, et, en prenant les dérivées partielles, par rapport aux x_{m+i}, b_i, nous avons

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial x_{m+i}} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu}\,\partial x_{m+i}} + \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial b_i} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu}\,\partial b_i} = 0.$$

Retranchons chacune de ces dernières identités de sa correspondante dans le système précédent; il s'ensuit

$$\sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu}\,\partial x_{m+i}} \left(\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \right) = \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu}\,\partial b_i} \left(\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \right) = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-m,$$

l'indice k prenant toutes les valeurs de 1 à m. Le déterminant (5) ne s'annulant pas, nous obtenons les identités cherchées

$$(7) \qquad \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} = \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}, \qquad \frac{\partial p_{m+\nu}}{\partial x_k} = -\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}},$$

l'indice ν prenant les valeurs de 1 à $n-m$, k, les valeurs de 1 à m. On en conclut donc que les valeurs des variables x_{m+i}, p_{m+i}, définies par les équations (6), sont une intégrale générale des équations (3).

L'inverse du théorème démontré repose sur le *lemme préliminaire :*

Soient les équations

$$(8) \quad x_{m+i} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}),$$

$$(9) \quad p_{m+i} = F_i(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-m$$

l'intégrale générale du système (3), a_i, b_i *étant des constantes arbitraires. En vertu de ces dernières équations la formule*

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}} - \mathrm{H}_k\right)dx_k$$

devient une différentielle exacte.

Posons

$$\mathrm{U}_k = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}} - \mathrm{H}_k.$$

Les identités (7) ayant lieu, nous obtenons

$$\frac{\partial \mathrm{U}_k}{\partial x_h} = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial^2 x_{m+i}}{\partial x_k\,\partial x_h} - \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial x_h} - \sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial x_{m+i}}\frac{\partial \mathrm{H}_h}{\partial p_{m+i}},$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial^2 x_{m+i}}{\partial x_h\,\partial x_k} - \frac{\partial \mathrm{H}_h}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial \mathrm{H}_h}{\partial x_{m+i}}\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}}.$$

Il s'ensuit donc, en vertu des identités (2),

$$\frac{\partial \mathrm{U}_k}{\partial x_h} = \frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial x_k},$$

l'expression étudiée étant une différentielle exacte, que nous allons appeler $d\mathrm{U}$,

$$d\mathrm{U} = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}} - \mathrm{H}_k\right)dx_k.$$

Théorème II. — *Prenons pour constantes* a_i, b_i *les valeurs initiales des variables* x_{m+i}, p_{m+i}. *La quadrature de la différentielle exacte* $d\mathrm{U}$ *effectuée, considérons la fonction*

$$\mathrm{V} = \int_{\mathrm{U}_0}^{\mathrm{U}} d\mathrm{U} + \sum_{i=1}^{n-m} a_i b_i + b,$$

où b est une nouvelle constante arbitraire, U_0, la valeur initiale de la fonction U. Les a_i étant éliminées, en vertu des équations (8), la valeur obtenue pour V est une intégrale complète du système (1).

Désignons par d une différentielle relative à des accroissements des variables x, par δ une différentielle relative à des accroissements des a_i, b_i et par Δ la différentielle totale, de sorte que l'on a

$$\Delta = d + \delta.$$

Il viendra évidemment

$$\Delta V = dU + \int_{U_0}^{U} d\,\delta U + \sum_{i=1}^{n-m} (b_i\,\delta a_i + a_i\,\delta b_i).$$

Les égalités (3) et (7) ayant lieu identiquement, nous avons

$$dU = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,dx_{m+i} - \sum_{k=1}^{m} H_k\,dx_k,$$

$$d\,\delta U = \sum_{k=1}^{m} \delta U_k\,dx_k,$$

en posant

$$\delta U_k = \sum_{i=1}^{n-m} \left(p_{m+i}\,\delta \frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k} + \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k}\,\delta x_{m+i} \right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i} \right).$$

On a donc

$$d\,\delta U = d\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i} \right),$$

et, par conséquent, on trouve

$$\int_{U_0}^{U} d\,\delta U = \sum_{i=1}^{n-m} (p_{m+i}\,\delta x_{m+i} - b_i\,\delta a_i).$$

Il s'ensuit

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} (p_{m+i}\,\Delta x_{m+i} + a_i\,\delta b_i) - \sum_{k=1}^{m} H_k\,dx_k.$$

Le déterminant fonctionnel des fonctions x_{m+i} par rapport aux constantes a_i admet une valeur différente de zéro, car, pour les valeurs initiales des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, il devient égal à 1. Il est donc toujours possible de résoudre les équations (8) par rapport aux constantes a_i et d'avoir, par conséquent, la valeur de V en fonction des variables x, b_i. On en déduit

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}}\Delta x_{m+i} + \frac{\partial V}{\partial b_i}\delta b_i\right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_k}\,dx_k.$$

En comparant les deux expressions de la différentielle ΔV, nous avons les égalités suivantes :

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}, \qquad \dfrac{\partial V}{\partial b_i} = a_i, \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, n-m, \end{array} \right.$$

$$(11) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_k} + H_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Les équations (10) présentent, entre les x, p_{m+i}, a_i, b_i, $2(n-m)$ relations distinctes, chacune d'elles contenant une des quantités, soit p_{m+i}, soit a_i, qui ne figurent pas dans les autres. Elles sont donc des équations intégrales du système (3) de forme différente des (8), (9). Quant aux équations (11), elles résultent des (1), en y substituant la valeur mentionnée de V ; elles démontrent donc que cette dernière fonction est une solution des équations (1). De plus c'est une intégrale complète. En effet, elle contient $n - m + 1$ constantes arbitraires distinctes b, $b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}$ et le déterminant fonctionnel

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}}\right)$$

ne s'annule pas, car pour les valeurs initiales des variables x_1, x_2, ..., x_m il devient égal à 1.

Cela étant, on voit bien que la fonction V sert à représenter l'intégrale complète des équations (1) et les équations intégrales du système (3). Cette fonction jouit donc de propriétés toutes analogues à la *fonction principale* de Jacobi dans sa théorie concernant une seule équation. Qu'il nous soit permis de donner aussi à V le nom de *fonction principale* de la théorie des équations que nous venons d'étudier.

Théorème III. — *Les constantes a_i, b_i conservant les mêmes valeurs initiales, supposons que les ν premières équations* (8) *soient résolubles par rapport aux constantes $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$. Posons*

$$V = \int_{U_0}^{U} dU + \sum_{i=\nu+1}^{n-m} a_i b_i + b,$$

b étant une nouvelle constante arbitraire. En éliminant les valeurs $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \ldots, a_{n-m}$, en vertu des équations (8), *on obtient une intégrale complète des équations* (1).

Procédant de même qu'en démontrant le théorème II, il viendra

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\Delta x_{m+i} + \sum_{i=\nu+1}^{n-m} a_i\,\delta b_i - \sum_{i=1}^{\nu} b_i\,\delta a_i + \sum_{k=1}^{m} H_k\,dx_k,$$

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial V}{\partial x_{m+i}}\,\Delta x_{m+i} + \sum_{i=\nu+1}^{n-m} \frac{\partial V}{\partial b_i}\,\delta b_i + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial V}{\partial a_i}\,\delta a_i + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_k}\,dx_k.$$

Il s'ensuit donc que les équations intégrales du système (3) prennent la forme suivante :

$$(12)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} &= p_{m+i}, && i = 1, 2, \ldots, n-m, \\ \frac{\partial V}{\partial a_\mu} &= -b_\mu, && \mu = 1, 2, \ldots, \nu, \\ \frac{\partial V}{\partial b_s} &= a_s, && s = \nu+1, \nu+2, \ldots, n-m. \end{aligned}$$

La valeur de V en fonction des $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est bien une intégrale complète du système (1), car il est impossible d'éliminer toutes les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \ldots, b_{n-m}$ des équations (12), ces dernières étant des équations intégrales distinctes du système (3).

Le théorème démontré est une généralisation des idées de M. Bertrand [1] concernant une seule équation aux dérivées partielles. Il contient comme cas particuliers celui où toutes les équations (8) sont résolubles par rapport aux constantes b_i, et le cas, étudié dans le théorème II, où il est supposé possible d'éliminer toutes les constantes b_i des équations (8). Le rapport du théorème III aux cas cités est le même que dans les théorèmes connus de Jacobi et M. Mayer [2] à celui de M. Bertrand ici mentionné.

Nous allons à présent tirer quelques conséquences des théorèmes démontrés relativement aux problèmes d'intégrations des équations différentielles (3). Mais, remarquons en premier lieu que ces dernières équations présentent une généralisation des systèmes canoniques des équations différentielles ordinaires, qui s'en déduisent en posant $m = 1$. On verra d'ailleurs que les équations (3) admettent les mêmes propriétés que ces dernières. Nous proposons donc de nommer les équations en question *système canonique des équations aux différentielles totales;* quant aux x_{m+i}, p_{m+i}, nous les appellerons *variables canoniques* appartenant relativement à *deux classes,* la *positive* et la *négative.*

Théorème IV. — *Si l'on connaît $n - m$ intégrales distinctes en involution du système* (3)

$$(13) \qquad \begin{cases} \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = b_i \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, n - m, \end{cases}$$

les b_i étant des constantes arbitraires, son intégration se ramène à une quadrature.

---

(1) *Comptes rendus*, t. LXXXII, p. 641.

(2) *Math. An.*, Bd. III, S. 435.

Les intégrales (13) sont dites *en involution* si l'on a des identités

$$(\psi_h, \psi_k) = \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial p_{m+i}} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_{m+i}} - \frac{\partial \psi_k}{\partial p_{m+i}} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_{m+i}} \right) = 0,$$

pour toutes les valeurs distinctes h, k de 1 à $n - m$.

On a de plus les identités suivantes

$$(p_k + \mathrm{H}_k, \psi_i) = 0,$$
$$k = 1, 2, \ldots, m, \qquad i = 1, 2, \ldots, n - m.$$

Il s'ensuit donc que les équations (1), (13) présentent un système de n équations aux dérivées partielles p_1, p_2, ..., p_n en involution. Leur intégrale complète s'obtient en effectuant la quadrature de la différentielle exacte

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s dx_s.$$

Supposons que

$$z = \mathrm{V} + b$$

soit son intégrale, V étant une fonction des variables x_1, x_2, ..., x_n et des constantes b_i, b une constante arbitraire. D'après le théorème I, les $n - m$ intégrales cherchées du système (3) sont

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial b_i} = a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n - m,$$

a_i étant de nouvelles constantes arbitraires.

Évidemment ce théorème est une généralisation de celui de Liouville ([1]) concernant un système canonique d'équations différentielles ordinaires. C'est un des plus beaux théorèmes démontrés par M. S. Lie ([2]). Mais notre démonstration est remarquable par sa simplicité en comparaison avec celle de cet éminent géomètre.

([1]) *Journal de Liouville*, 1re série, t. XX, p. 137.

([2]) M. S. Lie examine les équations linéaires aux dérivées partielles du pre-

THÉORÈME V. — *Si l'on connaît k intégrales distinctes et en involution du système* (3)

$$(14)\qquad \begin{cases} \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = b_i, \\ i = 1, 2, \ldots, k, \end{cases}$$

k étant moindre que $n - m$, l'intégration des équations (3) *revient à celle d'un système canonique aux différentielles totales d'ordre $2n - 2m - 2k$.*

Supposons les équations (14) résolubles par rapport aux variables $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_{m+k}$. Les équations (1), (14), ainsi que celles qui en résultent

$$p_v + H'_v(b_1, b_2, \ldots, b_k, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+k+1}, p_{m+k+2}, \ldots, p_n) = 0,$$
$$v = 1, 2, \ldots, m + k,$$

présentent un système en involution. Pour intégrer le système (3), il suffit d'avoir une intégrale complète de ces dernières équations. Mais ce problème, à une quadrature près, est équivalent à celui d'intégration des équations canoniques aux différentielles totales

$$(15)\qquad \begin{cases} dx_{m+i} = \displaystyle\sum_{v=1}^{m+k} \frac{\partial H'_v}{\partial p_{m+i}}\, dx_v, \\ dp_{m+i} = -\displaystyle\sum_{v=1}^{m+k} \frac{\partial H'_v}{\partial x_{m+i}}\, dx_v, \\ i = k + 1, k + 2, \ldots, n - m, \end{cases}$$

C'est ainsi que l'ordre du système (3) s'abaisse de $2k$ unités.

---

mier ordre d'une seule fonction inconnue φ

$$(p_k + H_k, \varphi) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

qui correspondent à notre système (3) (*Math. An.*, Bd. XI, S. 469).

THÉORÈME VI. — *Le problème d'intégration du système (3) exige $n - m$ opérations d'intégration d'ordre*

$$2n - 2m, \quad 2n - 2m - 2, \quad \ldots, \quad 4, \quad 2$$

et une quadrature (1).

Par une opération d'ordre $n - m$ nous aurons une intégrale du système (3) que nous supposons résoluble par rapport à p_{m+1}. L'ordre du système (3), d'après le théorème précédent, s'abaisse de deux unités. On parvient donc à un système de $2n - 2m - 2$ équations canoniques aux différentielles totales. On le traite de même que le système (3) et ainsi de suite.

Il va sans dire que, dans certains cas, l'ordre des opérations exigées peut être diminué. Supposons, par exemple, les fonctions H_1, H_2, ..., H_m indépendantes de ν variables x_1, x_2, ..., x_ν. Prenons, suivant Jacobi (2), au lieu des variables z, x_1, x_2, ..., x_ν pour nouvelle fonction

$$y = z - \sum_{i=1}^{\nu} x_i p_i$$

et pour nouvelles variables indépendantes p_1, p_2, ..., p_ν. Les m équations (1) se transforment dans m équations nouvelles, de même en involution; mais le nombre des variables indépendantes diminue de ν unités. Donc le nombre et l'ordre de toutes les opérations à effectuer sont de ν unités moindres.

Les opérations mentionnées terminées, on a par une quadrature une intégrale complète du système (1), et les formules (6) du théorème I donnent l'intégrale générale des équations (3).

Arrêtons-nous ici pour dire quelques mots sur le théorème II et son

(1) Comme on le fait d'ordinaire, nous appelons le calcul d'une intégrale d'un système de μ équations aux différentielles totales de $\mu + \nu$ variables, ν étant un nombre provisoire quelconque, *opération d'intégration d'ordre* μ.

(2) *Vorlesungen über Dynamik*, zweite Ausgabe, 1884, S. 164.

lemme préliminaire; ils ont été énoncés par M. Mayer [1], comme je l'avais mentionné dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 24 juillet 1899, en donnant leur extension aux équations quelconques en involution.

Or, la théorie développée constitue une certaine relation entre la *méthode des caractéristiques* de Cauchy et les *deux méthodes* de Jacobi. C'est ce que M. Delassus a démontré pour une seule équation [2].

Remarque. — Nous avons toujours supposé que les équations (13), (14) et celles du théorème VI sont résolubles par rapport aux variables $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots$ Il est aisé de voir que cela n'est point nécessaire, car, si ce n'est pas le cas, il suffit d'effectuer une transformation de M. Mayer [3] en réduisant plusieurs variables canoniques de classe positive dans la négative et à l'inverse.

Tout ce qui vient d'être dit démontre quelle grande analogie présente la théorie d'intégration des équations canoniques aux différentielles totales (3) avec celle des équations différentielles canoniques ordinaires. Mais il est aisé de pousser cette analogie encore plus loin.

Évidemment, les parenthèses de Poisson composées des fonctions présentant les premiers membres des intégrales du système (3), donnent lieu à de nouvelles intégrales.

Les équations intégrales du système (3) admettent une forme canonique, jouissant des mêmes propriétés que celle des équations canoniques différentielles ordinaires.

Chaque système complet des équations intégrales du système (3) se ramène à cette forme canonique, etc.

---

[1] *Nachrichten von der k. Gesellschaft der W. Göttingen*, S. 299; 1873.

[2] *Bulletin des Sciences mathématiques*, p. 187; 1897.

[3] *Math. An.*, Bd. VIII, S. 313. — *Comptes rendus*, 26 juin et 3 juillet 1899.

CHAPITRE III.

ÉTUDE SUR LES ÉQUATIONS CONTENANT LA FONCTION INCONNUE EXPLICITEMENT.

Supposons que les équations étudiées contiennent explicitement la fonction inconnue z et mettons-les sous la forme suivante :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} p_k + \mathrm{H}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = 0, \\ \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, m, \qquad m < n. \end{array}\right.$$

Ces dernières équations formant un système complet, les égalités

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial x_h} - \dfrac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial z}\mathrm{H}_h - \dfrac{\partial \mathrm{H}_h}{\partial x_k} + \dfrac{\partial \mathrm{H}_h}{\partial z}\mathrm{H}_k \\ \qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial \mathrm{H}_h}{\partial p_{m+i}}\frac{d\mathrm{H}_k}{dx_{m+i}} - \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}}\frac{d\mathrm{H}_h}{dx_{m+i}}\right) = 0, \end{array}\right.$$

où l'on a

$$\frac{d\mathrm{H}_k}{dx_{m+i}} = \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial x_{m+i}} + \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial z}p_{m+i}, \qquad \ldots,$$

sont identiquement satisfaites pour toutes les valeurs distinctes des indices h, k de 1 à m. Les conditions citées ont une forme remarquable, car elles deviennent identiques à celles du Chap. II, quand les fonctions H_k ne contiennent plus z.

Les équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} dz = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}} - \mathrm{H}_k\right)dx_k, \\ dx_{m+i} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}}dx_k, \\ dp_{m+i} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{d\mathrm{H}_k}{dx_{m+i}}dx_k, \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, n-m, \end{array}\right.$$

présentent bien un système aux différentielles totales, si les équations (1) forment un système complet, comme il se trouve démontré dans le Chapitre I. Nous proposons de donner à ces dernières équations (3) le nom de *système canonique généralisé des équations aux différentielles totales*. En y posant $m = 1$ on obtient les équations différentielles ordinaires, étudiées par Jacobi dans ses Mémoires posthumes ([1]). Nous allons continuer à développer notre théorie en démontrant les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Soit*

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}) \tag{4}$$

une intégrale complète des équations (1), $b, b_1, \ldots, b_{n-m}$ *étant des constantes arbitraires. Le déterminant fonctionnel*

$$D\left(\frac{V, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}}\right) \tag{5}$$

ne s'annulant pas, les équations

$$\left\{\begin{array}{l} z = V, \qquad \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}, \qquad \dfrac{\partial V}{\partial b_i} = a_i \dfrac{\partial V}{\partial b} \\ \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n-m, \end{array}\right. \tag{6}$$

donnent l'intégrale générale du système (3), a_i *étant de nouvelles constantes arbitraires.*

Il est d'abord nécessaire de remarquer que les équations (6) sont résolubles par rapport aux variables z, p_{m+i}, x_{m+i}. Évidemment les $n - m + 1$ premières équations donnent les valeurs z, p_{m+i}; quant aux $n - m$ dernières équations (6), en leur vertu le jacobien des

(1) *Gesammelte Werke*, Bd. V, S. 217, 397.

fonctions

$$\frac{\partial V}{\partial b_i} - a_i \frac{\partial V}{\partial b}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n - m$$

par rapport aux x_{m+i} devient égal au quotient du déterminant (5) et de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial b}$. Donc, les équations qu'on obtient en égalant les dernières fonctions à zéro sont résolubles par rapport aux x_{m+i}.

Cela posé, les valeurs trouvées z, x_{m+i}, p_{m+i} satisfont identiquement aux équations (6). Il viendra donc

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \frac{\partial V}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} p_{m+\nu} \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\, \partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\, \partial x_{m+\nu}} \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} = \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\, \partial x_k} - a_i \frac{\partial^2 V}{\partial b\, \partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\, \partial x_{m+\nu}} - a_i \frac{\partial^2 V}{\partial b\, \partial x_{m+\nu}} \right) \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} = 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots, m,$$

l'indice i prenant toutes les valeurs de 1 à $n - m$.

D'autre part, en substituant dans les équations (1) leur intégrale (4), on a

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + H_k = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\, \partial x_{m+i}} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu}\, \partial x_{m+i}} + \frac{d H_k}{d x_{m+i}} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\, \partial b} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu}\, \partial b} + \frac{\partial H_k}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\, \partial b_i} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu}\, \partial b_i} + \frac{\partial H_k}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial b_i} = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n - m,$$

l'indice k prenant les valeurs de 1 à m.

Il est d'ailleurs aisé d'en tirer de nouvelles identités

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \sum_{\nu=1}^{n-m} p_{m+\nu} \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} - \mathrm{H}_k,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x_{m+i}\, \partial x_{m+\nu}} \left(\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+\nu}} \right) = \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k} + \frac{d\mathrm{H}_k}{dx_{m+i}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-m} \left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x_{m+\nu}\, \partial b_i} - a_i \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x_{m+\nu}\, \partial b} \right) \left(\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+\nu}} \right) = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-m,$$

ayant lieu pour toutes les valeurs de l'indice k de 1 à m.

On vient de voir que le déterminant, formé par les coefficients des $n-m$ dernières équations linéaires par rapport aux $n-m$ quantités

$$\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+\nu}}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n-m,$$

ne s'annule pas. Par conséquent on obtient des identités

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k} = \dfrac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}}, \\[2ex] \dfrac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k} = -\dfrac{d\mathrm{H}_k}{dx_{m+i}}, \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial x_k} = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n-m} p_{m+\nu} \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+\nu}} - \mathrm{H}_k, \end{cases}$$

où les indices i, k prennent les valeurs mentionnées de 1 à $n-m$ et de 1 à m.

Notre théorème est donc démontré, car les équations (3) sont identiquement vérifiées par les fonctions z, x_{m+i}, p_{m+i} tirées des équations (6).

Théorème II. — *Soient les équations*

$$(8) \qquad z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}, b, b_1, \ldots, b_{n-m}),$$

$$(9) \qquad x_{m+i} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}, b, b_1, \ldots, b_{n-m}),$$

$$(10) \qquad p_{m+i} = \mathrm{F}_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}, b, b_1, \ldots, b_{n-m}),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-m,$$

l'intégrale générale du système (3), *les constantes arbitraires* a_i, b_i, b *représentant les valeurs initiales de*

$$x_{m+i}, \; p_{m+i}, \quad z - \sum_{i=1}^{n-m} x_{m+i} \, p_{m+i}.$$

En éliminant de la formule (8) *les constantes* a_i, *en vertu des équations* (9), *on obtient une intégrale complète du système* (1).

Le théorème énoncé est démontré dans le Chapitre I. Or, je veux en donner une nouvelle démonstration, représentant une généralisation de celle du Chapitre précédent.

Posons

$$U_k = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k.$$

Les équations (3) et les conditions (7) sont identiquement satisfaites, en vertu des relations (8), (9), (10).

Cela posé, en conservant les notions du Chap. II, il viendra

$$\delta \, dz = \sum_{k=1}^{m} \delta U_k \, dx_k,$$

$$\delta U_k = \sum_{i=1}^{n-m} \left(p_{m+i} \, \delta \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}} \delta x_{m+i} \right) - \frac{\partial H_k}{\partial z} \delta z.$$

La dernière expression prend aisément, en vertu des identités (7), la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta U_k &= \sum_{i=1}^{n-m} \left[p_{m+i} \, \delta \frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_k}{\partial z} p_{m+i} \right) \delta x_{m+i} \right] - \frac{\partial H_k}{\partial z} \delta z \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \, \delta x_{m+i} \right) - \frac{\partial H_k}{\partial z} \left(\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \, \delta x_{m+i} \right). \end{aligned}$$

Quant à la première formule, comme on a

$$\delta\, dz = d\, \delta z,$$

elle devient

$$d\left(\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right) + \left(\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right)\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial z}\, dx_k = 0$$

D'ailleurs, *en vertu des conditions* (2), *la formule*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial z}\, dx_k$$

est une différentielle exacte $d\mathrm{W}$.

Il vient, par conséquent,

$$d\left(\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right) + \left(\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right) d\mathrm{W} = 0.$$

Donc, en intégrant cette dernière équation, ayant par hypothèse

$$z_0 = b + \sum_{i=1}^{n-m} a_i b_i,$$

nous avons

$$\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i} = \left(\delta b + \sum_{i=1}^{n-m} a_i\,\delta b_i\right) e^{-\int_{\mathrm{W}_0}^{\mathrm{W}} d\mathrm{W}},$$

W_0 étant la valeur de W pour les valeurs initiales des variables x_1, x_2, ..., x_m. Comme on a

$$dz = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\, dx_{m+i} - \sum_{k=1}^{m} \mathrm{H}_k\, dx_k,$$

la valeur Δz devient

$$\Delta z = \sum_{i=1}^{n-m}\left(p_{m+i}\,\Delta x_{m+i} + e^{-\int_{\mathrm{W}_0}^{\mathrm{W}} d\mathrm{W}}\, a_i\,\delta b_i\right) + e^{-\int_{\mathrm{W}_0}^{\mathrm{W}} d\mathrm{W}}\,\delta b - \sum_{k=1}^{m} \mathrm{H}_k\, dx_k.$$

Les équations (9) étant résolubles par rapport aux a_i, il est aisé de les éliminer de l'équation (8). Soit

$$(11) \qquad z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m})$$

le résultat obtenu. Évidemment, la fonction V, en y substituant les fonctions (9) x_{m+i}, devient identique à la valeur (8) de z. On a donc

$$\Delta z = \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} \Delta x_{m+i} + \frac{\partial V}{\partial b_i} \delta b \right) + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial V}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial V}{\partial b} \delta b.$$

La comparaison des deux valeurs obtenues de la différentielle Δz nous donne les identités suivantes :

$$\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}, \qquad \frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i e^{-\int_{W_0}^{W} dW}, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = e^{-\int_{W_0}^{W} dW},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-m,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + H_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Il s'ensuit que le système

$$z = V, \qquad \frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}, \qquad \frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i \frac{\partial V}{\partial b},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-m,$$

représente les équations intégrales du système (3), écrites sous une forme nouvelle.

Quant à la fonction V, définie par l'équation (11), elle est une intégrale complète des équations (1). On voit de plus qu'elle admet les mêmes propriétés caractéristiques que la *fonction principale*, introduite dans le Chapitre précédent. Il serait aisé d'aller encore plus loin, en étudiant cette fonction dans les cas où les équations (8) sont résolubles, soit par rapport à quelques-unes des constantes b_i, soit par rapport à toutes. Si l'on a dans ce dernier cas $m = 1$, le système (1) ne contenant qu'une seule équation, on obtient les théorèmes démon-

trés par Jacobi dans les Mémoires mentionnés plus haut. Mais c'est là que je terminerai mes recherches sur cette fonction, la théorie étudiée étant, à mon avis, suffisamment élucidée.

Il ne me reste qu'à dire quelques mots sur le problème d'intégration des systèmes canoniques généralisés d'équations aux différentielles totales. On parvient aisément à établir les théorèmes suivants :

1° *Si l'on connaît* $n - m + 1$ *intégrales du système* (3) *distinctes par rapport aux* p *et de sorte qu'en les joignant aux équations* (1) *on en tire les valeurs* z, p *en fonctions des variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *vérifiant les conditions* $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, *on obtient les autres* $n - m$ *intégrales cherchées rien que par des différentiations.*

2° *Si l'on connaît* ν *intégrales du système* (3) *distinctes par rapport aux* p, ν *étant moindre que* $n - m + 1$, *de sorte, qu'ensemble avec les équations* (1), *elles forment un système complet, l'ordre du système* (3) *s'abaisse de* 2ν *unités.*

3° *Le problème d'intégration du système* (3) *n'exige que* $n - m + 1$ *opérations d'ordre* $2n - 2m + 1$, $2n - 2m - 1$, $\ldots$, 3, 1.

Leur vérité devient évidente, quand on poursuit l'ordre d'idées développé plus haut et n'exigeant que des calculs tout à fait élémentaires.

TABLE DES MATIÈRES.

CINQUIÈME SÉRIE. — TOME V.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.
(*Note de la Rédaction.*)

FIN DU TOME V DE LA CINQUIÈME SÉRIE.

26298 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat de poste ou valeur sur Paris.

OUVRAGES

A L'USAGE DES ÉLÈVES DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

MALEYX (**L.**), Professeur de Mathématiques élémentaires au collège Stanislas. — **Leçons d'Arithmétique**. In-8; 1891............... 4 fr.

LAURENT (**H.**), Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — **Traité d'Algèbre**, à l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement. Revu et mis en harmonie avec les derniers programmes, par *Marchand*, ancien Élève de l'École Polytechnique. 4 volumes in-8.

Ire Partie. — *Algèbre élémentaire*, à l'usage des Classes de Mathématiques élémentaires. 5e édition; 1897.................... 4 fr.

IIe Partie. — *Analyse algébrique*, à l'usage des Classes de Mathématiques spéciales. 5e édition; 1894........................ 4 fr.

IIIe Partie. — *Théorie des équations*, à l'usage des Classes de Mathématiques spéciales. 5e édition; 1894...................... 4 fr.

IVe Partie. — Complément : *Théorie des polynomes à plusieurs variables*; 1895.................................. 1 fr. 50 c.

ROUCHÉ (**Eugène**), Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, Examinateur de sortie à l'École Polytechnique, etc., et **COMBEROUSSE** (**Charles DE**), Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale des Arts et Manufactures. — **Traité de Géométrie**, conforme aux programmes officiels, renfermant un très grand nombre d'Exercices et plusieurs Appendices consacrés à l'exposition des Principales méthodes de la Géométrie moderne. 6e édition, revue et notablement augmentée. In-8 de LVII-1160 pages avec 707 figures et 1154 questions proposées; 1891.. 17 fr.

Prix de chaque Partie :

Ire Partie. — *Géométrie plane*........................ 7 fr. 50 c.

IIe Partie. — *Géométrie de l'espace; Courbes et surfaces usuelles*.. 9 fr. 50 c.

Avertissement. — En se bornant aux parties imprimées en caractères ordinaires, le lecteur aura à sa disposition un Traité entièrement conforme aux derniers *Programmes officiels*. Les Candidats aux Écoles spéciales trouveront dans les parties en petit caractère d'utiles développements. Enfin, les *Appendices* qui terminent les différents Livres sont consacrés à l'exposition des *nouvelles Méthodes géométriques*.

Les auteurs ont indiqué, pour les élèves studieux, un très grand nombre d'*Exercices* classés par paragraphes.

BRISSE (Ch.), Professeur à l'École Centrale et au lycée Condorcet, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Cours de Géométrie descriptive.** 2 volumes grand in-8; 1891.

Ire Partie, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques élémentaires. Avec 230 figures.. 5 fr.

IIe Partie, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales. Avec 209 figures.. 7 fr.

L'Auteur s'est attaché à débarrasser chaque question de toutes les questions auxiliaires qui l'obscurcissent, à séparer nettement la solution géométrique d'un problème de son exécution graphique, à exposer des méthodes véritablement générales, à mettre en évidence la succession logique et nécessaire des idées. A ces fins, les épures d'ensemble ont été séparées des épures de détail, chacune de celles-ci ne se rapportant jamais qu'à un détail unique; les questions de Géométrie pure soulevées par un tracé ont été résolues immédiatement à la suite de ce tracé, mais imprimées en petits caractères; les surfaces n'ont jamais été considérées comme étant du second ordre pour l'exposition d'une méthode générale, les simplifications résultant de cette circonstance n'ont été indiquées qu'ensuite; enfin chaque question a été, autant que possible, amenée immédiatement par la précédente. En un mot, cet Ouvrage se distingue par la simplicité et la clarté de l'exposition, ainsi que par l'enchaînement logique des idées.

CHAPPUIS (J.), Agrégé, Docteur ès Sciences, Professeur de Physique générale à l'École Centrale des Arts et Manufactures, et **BERGET (A.)**, Docteur ès Sciences, attaché au Laboratoire des Recherches physiques à la Sorbonne. — **Cours de Physique**, *à l'usage des Candidats aux Écoles spéciales* (conforme aux derniers programmes). Un beau volume grand in-8 ($25^{cm} \times 16^{cm}$) de IV-697 pages, avec 465 fig.; 1898. Prix :

Broché............. 14 fr. | Relié (cuir souple).. 17 fr.

GAUTIER (Henri) et **CHARPY (Georges)**, Docteurs ès Sciences, anciens Élèves de l'École Polytechnique. — **Leçons de Chimie**, *à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales.* 2e édition, entièrement refondue (notation atomique). Grand in-8, avec 92 figures; 1894....... 9 fr.

Ces **Leçons de Chimie** présentent ceci de particulier qu'elles ne sont pas la reproduction des Ouvrages similaires parus dans ces dernières années. Les théories générales de la Chimie sont beaucoup plus développées que dans la plupart des Livres employés dans l'enseignement; elles sont mises au courant des idées actuelles, notamment en ce qui concerne la théorie des équilibres chimiques. Toutes ces théories, qui montrent la continuité qui existe entre les phénomènes chimiques, physiques et même mécaniques, sont exposées sous une forme facilement accessible. La question des nombres proportionnels, qui est très souvent négligée dans les Ouvrages destinés aux candidats aux Écoles du Gouvernement, est traitée avec tous les développements désirables. Dans tout le cours du Volume, on remarque aussi une grande préoccupation de l'exactitude; les faits cités sont tirés des Mémoires originaux ou ont été soumis à une nouvelle vérification. Les procédés de l'industrie chimique sont décrits sous la forme qu'ils possèdent actuellement. L'Ouvrage ne comprend que l'étude des métalloïdes, c'est-à-dire les matières exigées pour l'admission aux Écoles Polytechnique et Centrale.

BRISSE (Ch.). — **Cours de Mécanique** à l'usage de la classe de Mathématiques spéciales, entièrement conforme au dernier programme d'admission à l'École Polytechnique. Grand in-8, avec 44 fig.; 1892. 3 fr. 25

HOÜEL (J.), Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Tables de logarithmes à CINQ DÉCIMALES pour les Nombres et les Lignes trigonométriques**, suivies de Logarithmes d'addition et de soustraction ou Logarithmes de Gauss et de diverses Tables usuelles. Nouvelle édition, revue et augmentée. Grand in-8; 1896. (*L'introduction de cet Ouvrage dans les Écoles publiques est autorisée par décision du Ministre de l'Instruction publique.*)

Broché.............. 2 fr. | Cartonné....... 2 fr. 75 c.

SCHRÖN (L.). — **Tables de logarithmes à sept décimales** pour les nombres depuis 1 jusqu'à 108000 et pour les lignes trigonométriques de dix secondes en dix secondes, et **Table d'interpolation pour le calcul des parties proportionnelles**: précédées d'une **Introduction** par *J. Hoüel*, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Grand in-8 jésus, sur vélin collé. Paris, 1897.

Broché............. 10 fr. | Cartonné...... 11 fr. 75 c.

On vend séparément :

	Prix : Broché.	Cartonné.
Tables de logarithmes..........................	8 fr.	9 fr. 75 c.
Tables d'interpolation.........................	2	3 25

PETERSEN (**Julius**), Professeur à l'Université de Copenhague. — **Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques**, avec application *à plus de 400 problèmes*. Traduit par O. Chemin, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées. 2e éd. Petit in-8, avec fig.; 1892. 4 fr.

SAUVAGE (**P.**), Professeur de Mathématiques (St-Cyr) au Lycée de Montpellier. — **Les lieux géométriques en Géométrie élémentaire**. In-8, avec figures; 1893.. 3 fr.

BRISSE (**Ch.**), Professeur à l'École Centrale et au Lycée Condorcet, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Recueil de problèmes de Géométrie analytique**, à l'usage des classes de Mathématiques spéciales. *Solutions des problèmes donnés au concours d'admission à l'École Centrale depuis* 1862. 2e édition. In-8, avec figures; 1892............... 5 fr.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, Journal des Candidats aux Écoles spéciales, à la Licence et à l'Agrégation, rédigé par M. *C.-A. Laisant*, Docteur ès Sciences, Répétiteur à l'École Polytechnique, Professeur à Sainte-Barbe, et M. *X. Antomari*, Docteur ès Sciences, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Carnot, ancien Élève de l'École Normale supérieure (*Publication fondée en* 1842, *par* Gerono *et* Terquem, *et continuée par* Gerono, Prouhet, Bourget, Brisse *et* M. Rouché, jusqu'à la fin de 1895.) In-8, mensuel, 3e Série, Tome XVIII; 1899.

Les **Nouvelles Annales de Mathématiques** paraissent chaque mois et forment par an un volume in-8 de 36 feuilles, avec figures.

L'abonnement est annuel et part de janvier.

Prix pour un an (12 NUMÉROS) :

Paris.. 15 fr.

Départements et Union postale.................. 17 fr.

Autres pays.................................... 20 fr.

S'adresser, pour la rédaction, à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, ou à M. ANTOMARI, 11*bis*, rue Daubigny, à Paris.

1re Série, 20 volumes in-8, années 1842 à 1861........... 300 fr.

Les Tomes I à VII, et XVI (1842-1848 et 1857) ne se vendent pas séparément. Les autres Tomes de la 1re Série se vendent séparément. 15 fr.

2e Série, 20 volumes in-8, années 1862 à 1881............ 300 fr.

Les Tomes I à III, V et XIX (1862 à 1864, 1866 et 1880) de la 2e Série, ne se vendent pas séparément. Les autres Tomes se vendent séparément.. 15 fr.

La **3e Série,** commencée en 1882, continue de paraître chaque mois par cahier de 48 pages au moins.

Les Tomes I à XVII (1882-1898) de la 3e Série se vendent séparément. 15 fr.

INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS (L'), dirigé par *C.-A. Laisant,* Docteur ès Sciences, ancien Élève de l'École Polytechnique, et *Émile Lemoine*, Ingénieur civil, ancien Élève de l'École Polytechnique. Fondé en 1894. In-8 mensuel. Les abonnements sont annuels et partent de Janvier.

Prix pour un an (12 NUMÉROS) :

Paris, 7 fr. — Départements et Union postale, 8 fr. 50 c.

Les années antérieures se vendent chacune .... 7 fr.

MM. Laisant et Lemoine ont eu l'heureuse idée de mettre en rapport scientifique les mathématiciens, au moyen d'un organe international dont le titre, l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, indique le but. Ce recueil mensuel, qui paraît depuis janvier 1894, n'admet d'autres articles que des questions posées par les mathématiciens à leurs collègues, soit pour en indiquer l'intérêt général, soit pour les besoins de leurs recherches personnelles, et les réponses à ces questions. La Mathématique est si vaste maintenant que nul n'en connaît complètement même une des branches, et qu'une question de détail (science, histoire, bibliographie) peut arrêter longtemps un savant de premier ordre, si ce détail sort du cadre de ses études ordinaires, tandis qu'elle ne serait qu'un jeu pour un autre.

Cette publication répond évidemment à un besoin, car elle a reçu, dès le principe, l'accueil le plus empressé dans le monde scientifique.

26527 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Journal de mathématiques
pures et appliquées

